

MODELISATION PROPAGATION EXCITATION

CARDIAQUE EDP VI1 –

Mr Mamadou lamine dit papa NDao

Maitrise EEA orsay 1977-DEA Traitement information et automatique

1977 INSTN et universite orsay-bourse DGRST these 1977-1979

In2p3 service electronique accelerateurs universite orsay

$\delta V/\delta t =$ $\delta I_1/\delta t =$

Thèorie oscillateurs à relaxation cardiaque et chao et modele EDP VI1

Et simulation Matlab-electronique-thèorie Hamiltonienne

IEEE EMBS senior member 2000,e-member societe européenne de

Cardiologie-membre associe auteur sicav,Scam sa France 2012

ISBN : 979-10-90848-12-2

EAN barre : 9781090848122

INTRODUCTION

J'ai développé mon apprentissage de recherche et développement RD, étant boursier DGRST France 1977-1979 à l'université Orsay. Malheureusement la DGRST avait oublié de nous faire parvenir régulièrement le bulletin officiel du ministre de la recherche et le livre blanc publié en 1978 ce qui aurait mûri pour certains notre adaptation aux capacités manageriales. Rentré par accident au Sénégal avec la naissance de l'internet en 1995 on m'a fait quitter ESP Dakar, ex iut de Dakar au 31 mars 1988. J'ai créé ma structure RD une entreprise individuelle, Bureau EA. Je suis tombé un jour de 1992 sur un article de Balth Van Der Pol, sur les oscillateurs à relaxation et son simulateur cardiaque en 1928. Cela m'a inspiré. Comment créer ma structure de RD au Sénégal privée, et n'étant pas financée, essayer d'animer une plateforme privée, indépendante et libre dans le bénévolat, étant accueilli à ma demande dans les labo de ESP Dakar et IREMPT université Dakar, animer des espaces de rencontres et d'échanges libres avec les camarades mathématiciens. Je commence à publier, Ceci est la suite aux opportunités de mon dépôt de brevet invention à **INPI en 2014 Ref, N°1202323.**

Mon modèle à équation différentielle ordinaire EDO VI1-VINAIK, des oscillations à relaxation cardiaque et les camarades mathématiques IREMPT et ESP me permettent comme une incubation libre et non organisée entre public et privé, d'utiliser les machines PC, l'internet et la bibliothèque. Pour le modèle EDO VI1 c'est 2 variables couplées, V le potentiel de membrane cellulaire et I1 une variable courant excitation. Pour le modèle EDO VINAIK, V est toujours la fonction potentielle et Ina et Ik les courants ioniques sodium et potassium. Je m'auto-organise pour faire les simulations avec le logiciel Matlab et Simulink et Runge Kutta dans les labo incubation libre accordée par les camarades ESP et faculté sciences. J'établis mes relations extérieures de mes résultats en utilisant au départ le service courrier boîte postale ESP 8085. Le modèle EDO VI1 est illustré en bas,

$$\frac{dV}{dt} = P(V, I1, K) \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dI1}{dt} = Q(V, I1, K) \quad (2)$$

K est l'espace des paramètres cardiaques. Je simule et montre les figures oscillation à relaxation et figures chaos non autonomes et

et attracteurs étranges. J'apprends à reconnaître les acteurs de la théorie des chaos, David Ruelle, Lorenz, Leon Grass, Mandelbrot, Cantor, Leon Chua,

J'édite mon tome 1 à numilog et permet la visibilité à 20% des autres tomes à 20% à google books. Il me resta à élucider la modélisation et la simulation de la propagation de l'excitation cardiaque, avec des équations différentielles partielles, EDP-VI1-VInalk. C'est le problème théorique de Réaction-Diffusion Modèle EDO VI1-VInalk, dans les espaces, x et t, x, y, et t et Espace x, y, z et t. Par exemple sur l'espace x, et t, diffusé.

$$\delta V / \delta t = A * \delta^2 V / \delta x^2 + B * \delta V / \delta x + P(V, I1, K) \quad (3)$$

$$\delta I1 / \delta t = D * \delta^2 I1 / \delta x^2 + E * \delta I1 / \delta x + Q(V, I1, K)$$

Les solutions à prouver l'existence sont les fonctions V(x,t) et I1(x,t). Je généralise ces résultats pour les espaces x, y, z et t.

J'applique les résultats de Cauchy et des opérateurs différentiels linéaires aux EDP cardiaques. Pour bon nombres de chercheurs de notre génération on peut s'engager à décrire aux jeunes les temps des grands professeurs de France de la 2^{ème} génération, à Lyon 1, les Pr Sarazin, Duffay, Erbèa, Uzan et à Paris Pr P. Debraine Pr Andre Blanc Lapierre, et Pr Bernard Picinbono. 1980 Cela fait 35 ans. Il faut parler aux jeunes le temps des grands livres de base, tel que le livre de Angot, le livre de P. Debraine chez Masson en s'adaptant aux nouvelles structures LMD. Il est prévu un volume 2, après le matlab, faire participer scilab avec quelques simulations EDP VI1.

CHAPITRE 1

Classification des équations EDP

1-1-Classification des équations EDP

On commence par la classification des équations différentielles partielles du second ordre,

$$a(x,y)U_{xx} + 2bU_{xy} + c(x,y)U_{yy} = \Psi(x,y,U_x,U_y) \quad (1)$$

On distingue ces cas :

-Classe hyperbolique $b^2 - ac > 0$ (2)

-Classe parabolique $b^2 - ac = 0$ (3)

-Classe elliptique $b^2 - ac < 0$ (4)

1-2-La classe des équations EDP du 1^{er} ordre

Soit n valeurs indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n , on définit une fonction $U(x,y)$,

Si $n=2$, une équation dite EDP 1^{er} ordre, à 2 variables indépendantes x,y .

$F(x,U,p)=0$ (5) avec une seule variable x est dite EDP linéaire. C'est

L'analyse du livre EDP de G.Smith (voir bibliographie de Sir John College

Londres). On distingue ces classes la variable $p = \delta U / \delta x$ (6) si on a un système

de n particules liées et $q = \delta U / \delta y$ (6)

--A-La classe linéaire (5)

---B---La classe semi-linéaire

$$\sum A_i(x) p_i = C(x, U) \quad (7)$$

---C---La classe quasi-linéaire

$$\sum A_i(x, U) p_i = C(x, U) \quad (8)$$

Je m'intéresse aux équations EDP ayant l'opérateur temps $\delta/\delta t$.

On trouve ce problème dans la théorie Hamiltonienne et l'équation Hamilton-Jacobi.

$$\delta S/\delta t = H(x, t, \delta S/\delta x) \quad (9)$$

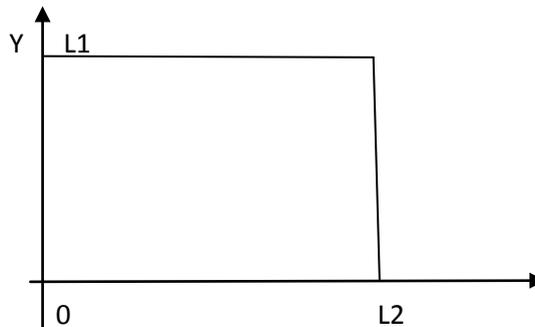
1-3-La classe des EDP du 2^{ème} ordre

$$A(x, y) \delta^2 \Psi(x, y) / \delta x^2 + B(x, y) \delta^2 \Psi(x, y) / \delta x \delta y + C(x, y) \delta^2 \Psi / \delta y^2 = \phi(x, y, \Psi_x, \Psi_y) \quad (10)$$

On suppose qu'on a un système décrit par une fonction potentiel Ψ dépendant de 4 variables indépendantes dans une structure rectangulaire à 2 composantes indépendantes x , et y , tel que au point (x, y) on fait correspondre une fonction potentielle indépendante du temps t , $\Psi(x, y)$.

$$0 < x < L1 \quad (11) \quad 0 < y < L2 \quad (12)$$

Figure 1

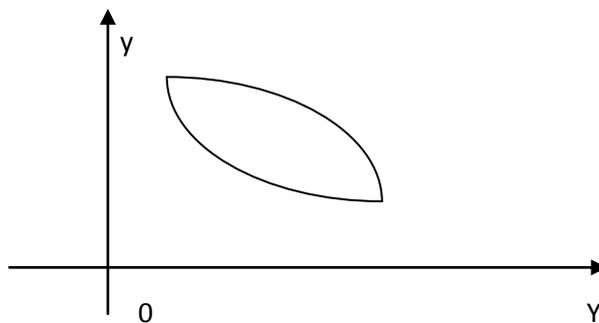


On peut avoir une structure dont les contours ne sont pas rectangulaires.

Les contours sont décrits par une courbe $\phi(x,y)=0$ ou $y=y(x)$ (13). Ce sont les

Conditions aux limites Dirichlet ou Neuman

Figure 2



Pour les problèmes physiques dont la fonction potentielle dépend du temps t ,

$\Phi(x,y,t)$, on a un système décrit par la théorie Hamiltonienne qui décrit la dynamique des particules, ou l'électrodynamique une discipline de la mécanique quantique et de la mécanique.

CHAPITRE 2

LA THEORIE HAMILTONIENNE ET LES SYSTEMES EDP COUPLEES

DE N PARTICULES

2-1-Introduction

Soit un système de n particules de masse m_i et de position (x_i, y_i, z_i) et

La fonction potentielle $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ (11) dépendante ou non du

temps t. Les variables x_i sont indépendantes. On définit ces nouvelles

variables, pour le cas à 2 variables x et y.

$$p_i = \delta V / \delta x_i \quad (12) \quad \text{et} \quad q_i = \delta V / \delta y_i \quad (13)$$

On forme la fonction H,

$$H = T - V \quad (14)$$

T est l'énergie cinétique totale des n particules liées et V le potentiel

d'interaction, et m la masse totale.

$$T = \sum \left(\frac{1}{2} \right) m_i U_i^2 \quad (15) \quad U \text{ est la vitesse moyenne des particules.}$$

On forme la fonction Lagrangienne à minimiser L,

$$H = \int p^*(dq) dt - L \quad (16)$$

On applique le principe du maximum pour les lois d'évolution du sys-

tème.

$$dq/dt = \delta H / \delta p \quad (17)$$

$$dp/dt = -\delta H / \delta q \quad (18)$$

Je rappelle la fonction H,

$$H = p^2 / (2m) - V(x, y, t) \quad (19)$$

La dépendance du temps t introduit la nouvelle fonction $S(x, y, t)$ ou

$$P = \delta S / \delta t \quad (20)$$

On retrouve l'équation différentielle partielle de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$\delta S / \delta t = H(x, y, \delta S / \delta x, t) \quad (21)$$

Elle est parente de l'équation de Schrödinger.

$$(1/2m)\delta^2 \phi(x,t) / \delta x^2 - k^2 \phi(x,t) = \delta \phi(x,t) / \delta t \quad (22)$$

La fonction d'onde de Broglie associée à la particule est $\phi(x,t)$. Une interprétation de la représentation de Heisenberg est que l'énergie est une valeur propre de l'opérateur H.

$$H \phi(x,t) = E \phi(x,t) \quad (23)$$

On cherche une solution avec la méthode des variables séparées.

$$\Phi(x,t) = \psi(t) * \pi(x) \quad (24)$$

On va essayer de présenter une solution d'onde de l'équation de Schrödinger, avec l'opérateur H,

$$H\psi = -(\hbar^2/2m)\delta^2 \psi / \delta x^2 + V(x)\psi \quad (25)$$

$$i\hbar \delta \psi / \delta t = H\psi \quad (26)$$

On cherche une solution avec les variables séparables.

$$\Psi_n(x,t) = \phi_n(x) \text{Exp}(-iE_n t / \hbar) \quad (26)$$

Avec les conditions initiales,

$$\Psi_n(x,0) = \sum a_n \phi_n(x) \quad (27)$$

On adopte une solution série.

$$\Psi(x,t) = \sum a_n \phi_n(x) \text{Exp}(-iE_n t/\hbar) \quad (28)$$

Si on appelle E l'énergie de collision de la particule devant le puits de potentiel V_0 constant,

$$\phi_n(x)'' = (2m(V_0 - E)/\hbar^2) \phi_n(x) \quad (29)$$

La fonction d'onde est définie comme,

$$\Phi_n(x) = \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx) \quad (30) \quad \text{si } E > V_0 \quad (31)$$

$$\Phi_n(x) = \gamma \text{Exp}(-kx) + \delta \text{Exp}(kx) \quad \text{si } E < V_0 \quad (32)$$

Le nombre d'onde est

$$k_n = n\pi/\alpha \quad (33)$$

L'énergie E_n est quantifiée.

$$k = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad (34)$$

L'énergie E_n est,

$$E_n = (\hbar^2 \pi^2 / 2m) n^2 \quad (35)$$

CHAPITRE 3

Exemple à équations EDP 1^{er} ordre et Lignes caractéristiques

3-1-Exemple 1 EDP 1^{er} ordre

Une équation du 1^{er} ordre s'énonce ainsi,

$$A(x,y) \delta u / \delta x + B(x,y) \delta u / \delta y + C(x,y) = D(x,y) \quad (22)$$

Soit donc l'exemple 1 d'équation EDP sur le domaine $D=(x,y), 0 < x < L1$ et $0 < y < L2$ (23).

$$\delta u / \delta x + \delta u / \delta y = 0 \quad (24)$$

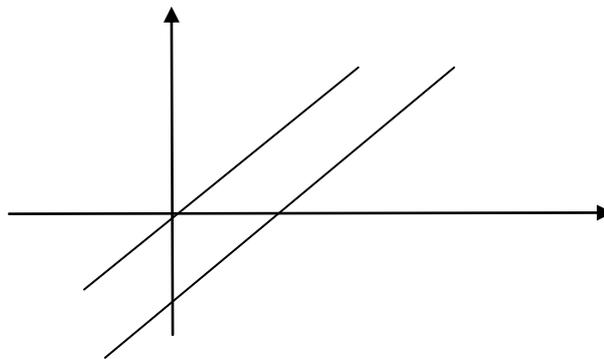
On cherche une fonction $u(x,y)$ telle que sur les lignes caractéristiques, la fonction potentielle est constante, u , ce sont lignes equipotentielle.

$$\delta u = (\delta u / \delta x) dx + (\delta u / \delta y) dy \quad (25) \text{ et si } dx = -dy \text{ alors } du = 0 \quad (26)$$

Sur chacune des courbes $y - x = \zeta$ (27) la fonction u est constante, et u ne dépend que de ζ .

$$u(x,y) = f(\zeta) = f(x-y) \quad (28)$$

Figure 2



Comme 2^{ème} cas on prend l'équation des ondes.

$$\delta^2 u / \delta t^2 = c^2 \delta^2 u / \delta x^2 \quad (29)$$

La fonction u sur le domaine $D(x,y)$, est constante sur les lignes caractéristiques,

$$\zeta = x - ct \quad (30) \quad \eta = x + ct \quad (31)$$

L'équation d'onde devient,

$$\delta^2 U / \delta \zeta \delta \eta = 0 \quad (32)$$

On suppose les conditions initiales,

$$U(x,0) = \phi(x) \quad (33)$$

$$\delta u(x,0) / \delta t = \psi(x) \quad (34)$$

La solution générale est,

$$u(x,t) = (1/2) [\phi(x-ct) + \psi(x+ct)] + (1/2c) \int \psi(s) ds \quad (35)$$

CHAPITRE 4

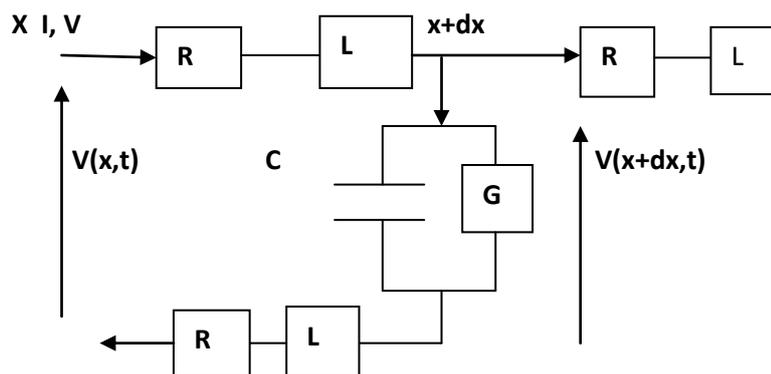
Propagation sur une ligne électrique

4-1-Introduction

Le réseau de propagation de l'énergie électrique sur un câble électrique,

Se fait sur le réseau RLCG suivant, analysée en loi des mailles en serie.

Figure 3



La propagation de l'énergie électrique se fait de gauche vers la droite.

L'espace de propagation est l'axe des x positifs $x > 0$ et $t > 0$ le temps t .

Au point x le courant électrique est $I(x,t)$ et la tension électrique $V(x,t)$.

Je traduis la loi des mailles de Kirchoff, pour obtenir ces équations, différentielles partielles,

$$\delta V/\delta x = R \cdot I + L \cdot \delta I/\delta t \quad (36)$$

$$\delta I/\delta x = G \cdot V + C \cdot \delta V/\delta t \quad (37)$$

La traduction du flux électrique ϕ et de la charge électrique, entraîne une équivoque pour l'obtention des équations pour un modèle physique, soit du 1^{er} degré ou du degré 2 ou supérieur. Et selon la convention choisie pour approximer la différentielle totale par la dérivée de Leibniz.

$$I = C \cdot dV/dt \quad (38) \text{ et } V = L \cdot dI/dt \quad (39)$$

Soit une fonction $f(x,t)$ on sa différentielle totale df , en allant avec limite d'ordre 1, 2 ou supérieur à 2.

$$df(x,t) = (\delta f/\delta t) \cdot dt + (\delta f/\delta x) \cdot dx + (\delta^2 f/\delta x^2) \cdot (dx^2) + (\delta^2 f/\delta x \delta t) \cdot (dx \cdot dt) + (\delta^2 f/\delta t^2) \cdot (dt^2) + o() \quad (40)$$

Je vais utiliser ce principe pour modéliser des phénomènes avec des équations EDP du 1^{er} ordre et du 2^{ème} ordre. Je me suis inspiré des résultats du livre de J.P. Nougier et de G. Smith cités en bibliographie. On trouve ces équations EDP de propagation de l'énergie électrique sur câble électrique, en un système de 2 EDP couplées tension $V(x,t)$ et courant $I(x,t)$.

$$\delta V/\delta t = (1/RC) \cdot \delta^2 V/\delta x^2 - (L/RC) \cdot \delta I/\delta x \delta t - (G/C) \cdot V \quad (41)$$

$$\delta I/\delta t = (1/GL) \cdot \delta^2 I/\delta x^2 - (R/L) \cdot I - (C/GL) \delta^2 V/\delta x \delta t \quad (42)$$

celui qui est intéressé à cette équation pourra utiliser les méthodes de résolution des systèmes EDP pour trouver les fonctions solutions $V(x,t)$ et $I(x,t)$ donc investisseur sur les réseaux électriques pour transporter le courant et l'internet. On a aussi une seule équation EDP.

$$\delta V/\delta t = (1/L(C+G)) \delta^2 V/\delta x^2 - (RG/L(G+C)) V - (C/(G+C)) \delta^2 V/\delta t^2 \quad (43)$$

La 1^{ère} idée qui saute dans la tête est si une équation EDP admet une solution unique ou non, et admet-elle des solutions périodiques ou non.

On peut chercher des solutions serie de la forme,avec par exemple une équation EDP de propagation sur câble électrique,seul $V(x,t)$,la tension.

$V(x,t) = \sum a_k(x) \cos(Wkt)$ (44) ou appelée méthode variables séparées.

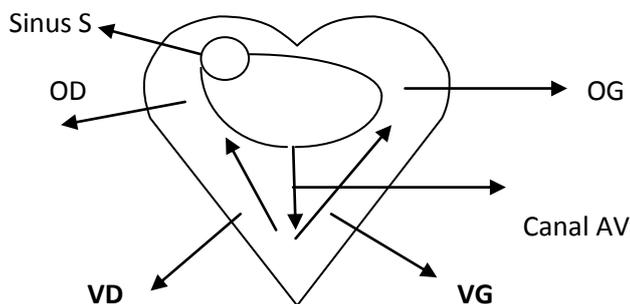
CHAPITRE 5

Propagation de l'excitation cardiaque et réseau VI1

5-1-Phénomène cardiaque

Historiquement d'après les travaux de A.F.Hodgkin,A.L.Huxley,Ftzhugh et Naguno et de certains biophysiciens et spécialistes d'électrophysiologie cardiaque,le rythme cardiaque est crée périodiquement avec un cycle de 80 beats /mn au niveau du Sinus S.L'excitation cardiaque se propage vers L'oreillette gauche OG avec du retard vers l'oreillette droite OD.Les groupes de lignes de propagation se rejoignent au canal AV de Ashoff Tawara.L'excitation traverse le canal AV et excite le ventricule gauche VG et excite le ventricule gauche avec du retard.A la fin de ce cycle l'excitation recommence.

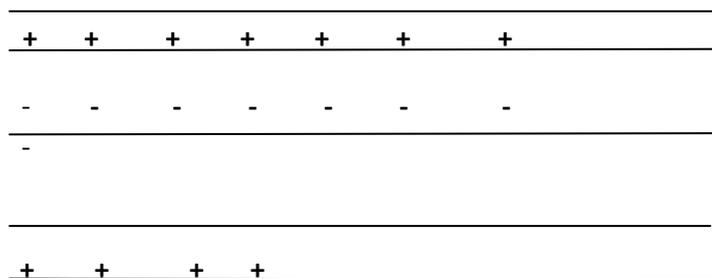
Figure 4



5-2- Propagation sur une fibre cardiaque reseau VI1

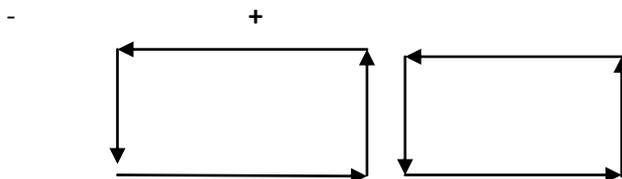
Une fibre cardiaque en électrophysiologie est constituée de cellules cardiaques en liaison serie.

Figure 6



Les cellules cardiaques exterieures **sont polarisées + par rapport aux cellules cardiaques intérieures polarisées** .Quand un **signal excitation cardiaque arrive sur la fibre les cellules cardiaques interieures se polarisent + ce qui crèent un courant électrique près à se propager.**

Figure 7



CHAPITRE 6

Le modèle EDO VI1 en processus reaction-diffusion pour transporter l'excitation cardiaque.

6-1- Introduction du modele EDO VI1 et reseau VI1

Je rappelle le modele d'èquations differentielles ordinaires ,EDO VI1,

$$dV/dt = (1/C)*F(V) -(1/C)*I1 +(1/C)*Io \quad (45)$$

$$dI1/dt= (1/L)* V-(R/L)*I1 + E/L \quad (46)$$

$V(t)$ est le potentiel de membrane cellulaire qui a un cycle limite le beat cardiaque et $I1(t)$ une variable d'excitation,et $Io(t)$ une courant stimulation électrique. $F(V)$ est une conductance non linèaire.

$$F(V)=aV^3 +bV^2 +doV +d1 \quad (47)$$

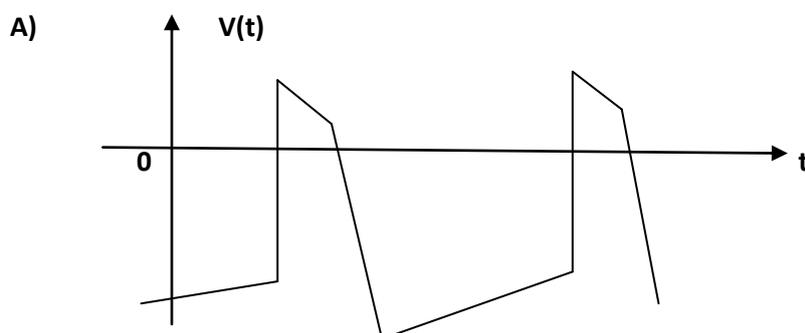
Les 8 paramètres cardiaques sont , $a,b,do,d1,E,R,L$ et C .Je peux faire transformation en vecteur $X=(V,I1)'$ (48)

Le système dynamique devient non linèaire.

$$dX/dt= A*X + F(X,t) \quad (49) \text{ si non autonome } Io(t) \text{ non nul.}$$

L'èvolution en fonction du temps du potentiel de membrane cellulaire, $V(t)$,

Figure 8



Ce sont le comportement des cellules cardiaques dites Pacemaker qui battent le rythme cardiaque , $V(t)>0$ (50) cellule activèe contraction du muscle cardiaque.Et $V(t)<0$ relaxation muscle cardiaque.

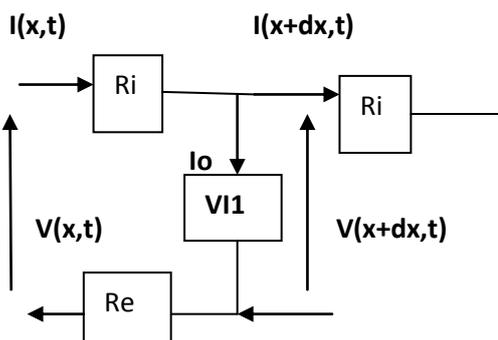
CHAPITRE 7

Le système EDP couplées cardiaque ou EDP VI1-1

7-1-Le reseau EDP VI1 diffusè

Après avoir presentè le modele cardiaque EDO VI1 equation differentielle ordinaire dit EDO VI1 je presente le modèle de diffusion EDP, èquation differentielle partielle,avec le reseau diffusè EDP VI1-1.

Figure 8



Je traduits la loi des mailles,loi de Kirchoff et d'ohm des nœuds.

$$V(x,t)-V(x+dx,t)=I(x,t)*(Re+Ri) \quad (50)$$

$$\delta V/\delta x = -(Re+Ri) I(x,t) \quad (51)$$

$$I(x,t)-Io(x,t)-I(x+dx,t)= 0 \quad (52)$$

$$\delta I(x,t)/\delta x = -Io(x,t)= -(1/(Re+Ri))\delta^2 V/\delta x^2 \quad (53)$$

La loi des nœuds de courant donne.

$$Io-CdV/dt -I1+F(V)= 0 \quad (54)$$

L'application du developpement limite de la differentielle totale fait que

On tombe sur une èquation EDP du 1^{er} ordre ou du 2^{ème} ordre.

$$dV = \left(\frac{\delta V}{\delta t} \right) dt + (dx) \frac{\delta V}{\delta x} + (dx)^2 \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + (dx dt) \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta t} + (dt^2) \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} + O() \quad (55)$$

On aussi cette loi d'ohm.

$$V(x,t) = R \cdot I_1 + L \cdot dI_1/dt \quad (56)$$

7-2-Proposition 1

Les relations entre I courant, Q charge, et le flux ϕ sont,

$$I = dQ/dt = CdV/dt \quad (57)$$

$$V = LdI/dt = d\phi/dt \quad (58)$$

Dans ce modèle EDP VI1-1 on confond d'èrivè totale et partielle.

Et le modèle EDP VI1-1,

$$\delta V / \delta t = (1/(Re+Ri)C) \delta^2 V / \delta x^2 - (1/C) I_1 + (1/C) F(V) + I_0(x,t) \quad (59)$$

$$\delta I_1 / \delta t = (1/L) V - (R/L) I_1 + E/L \quad (60)$$

C'est un système EDP couple ou il y a l'opérateur laplacien et non le gradient donc du EDP 2^{ème} ordre. Je pose la définition,

$$A = 1/(Re+Ri)C \quad (61)$$

Ce système EDP admet elle une solution $V(x,t)$, et $I_1(x,t)$ et quand elle

Périodique ou non périodique. Avec quelle méthode je vais construire

Les solutions.

7-3-Gènèralisation à l'espace (x,y,t)

$$\delta V/\delta t = A*[\delta^2 V/\delta x^2 + \delta^2 V/\delta y^2] - (1/C)I_1 + (1/C)I_0 + (1/C)F(V) \quad (62)$$

$$\delta I_1/\delta t = (1/L)V - (R/L)I_1 + E/L \quad (63)$$

Les fonctions solutions quand elles existent sont $V(x,y,t)$ et $I_1(x,y,t)$.

$$0 < x < L_1 \quad 0 < y < L_2 \quad 0 < t < T \quad (64)$$

Si la propagation est anisotrope on prend A_1 sur l'axe x et A_2 sur

l'axe y et isotrope si $A_1 = A_2 = A$

7-4-Gènèralisation dans l'espace (x,y,z,t)

$$\delta V / \delta t = A[\delta^2 V / \delta x^2 + \delta^2 V / \delta y^2 + \delta^2 V / \delta z^2] - (1/C)I_1 + (1/C)F(V) + (1/C)I_0$$

(65)

$$\delta I_1 / \delta t = (1/L)V - (R/L)I_1 + E/L \quad (66)$$

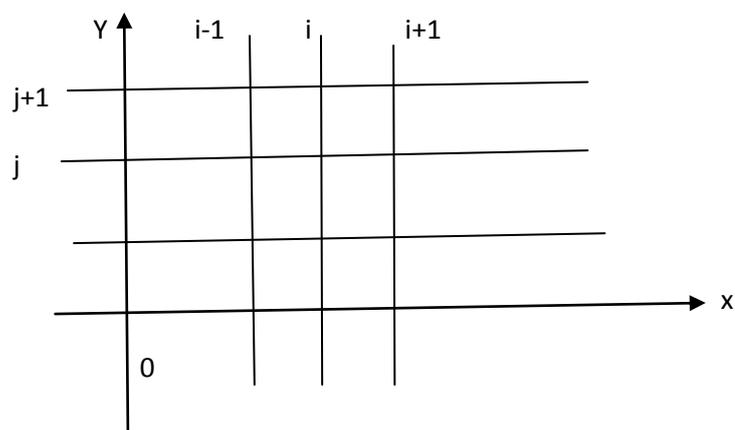
$$0 < x < L_1 \quad (67) \quad 0 < y < L_2 \quad (68) \quad 0 < z < L_3 \quad (69) \quad 0 < t < T \quad (70)$$

Les solutions quand elles existent sont les fonctions $V(x,y,z,t)$ et $I_1(x,y,z,t)$.

Avec la condition isotropie et anisotropie sur x,y,et z, A_1, A_2, A_3 , et non

$$A_1 = A_2 = A_3$$

Figure 9 espace –temps discrètisè



CHAPITRE 8

Le modèle EDP VI1-2 cardiaque

8-1-Introduction de la différentielle totale développée limitée

On fait le développement limité en choisissant les termes à sélectionner.

Finalement je tombe sur un système EDP VI1 avec des termes gradient, et termes laplaciens.

Je discrétise l'espace et le temps en intervalles dx et dt liés.

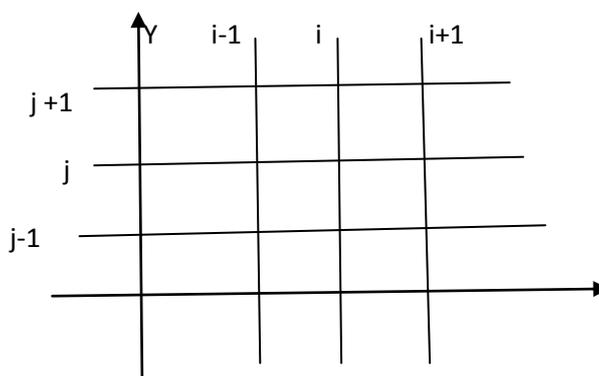
$$\Delta x = l/N \quad (71) \quad \Delta t = T/M \quad (72) \quad 0 < x < l \quad (73) \quad 0 < t < T \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \delta V / \delta t = & (1/C)[L^2 M / TN^2 C + A] \delta^2 V / \delta x^2 - (LM / NTC^2) \delta V / \delta x - (1/C) * I_1 \\ & + (1/C) * F(V) + (1/C) * I_0 \quad (75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta I_1 / \delta t = & -(l^2 M / TN^2) \delta^2 I_1 / \delta x^2 - (LM / NT) \delta I_1 / \delta x - (R/L) I_1 + (1/L) V + E^2 / L \\ & (76) \end{aligned}$$

Les fonctions solution quand elles existent sont, $V(x,t)$ et $I_1(x,t)$.

Figure 10 discrétisation x-t



8-2-Gènèralisation du modèle EDP VI1-2 à l'espace (x,y,t)

$$A=1/C(Re+Ri) \quad (77) \quad B=(1/C)[l^2M/TCN^2] \quad (78) \quad D=-(l^2M/TN^2) \quad (79)$$

$$E= LIM/NT \quad (80)$$

$$\delta V/\delta t = A[\delta^2 V/\delta x^2 + \delta^2 V/\delta y^2] + B[\delta V/\delta x + \delta V/\delta y] + (do/C)V +$$

$$+(1/C)[aV^3 + bV^2] + (1/C)I_0(x,t) \quad (81)$$

$$\delta I_1/\delta t = D[\delta^2 I_1/\delta x^2 + \delta^2 I_1/\delta y^2] - E[\delta I_1/\delta x + \delta I_1/\delta y] - (R/L)I_1 + (1/L)V +$$

$$E^2/L \quad (82)$$

Les solutions sont $V(x,y,t)$ et $I_1(x,y,t)$. avec les choix A1 et A2, different.

de A.

8-3-Gènèralisation du modèle EDP VI1-2 à l'espace (x,y,z,t)

Je prends la notation du Laplacien et du Gradient, Δ et grad.

$$\delta V / \delta t = A * \Delta V + B * \text{grad} V + (d_0 / C) V - (1 / C) I_1 + (1 / C) [a V^3 + b V^2] + (1 / C) I_0 \quad (83)$$

$$\delta I_1 / \delta t = D * \Delta V + G \text{grad} V - (R / L) I_1 + (1 / L) V + E / L \quad (84)$$

Les solutions sont $V(x,y,z,t)$ et $I_1(x,y,z,t)$. avec les choix A_1, A_2 , et A_3

Different de A.

CHAPITRE 9

Résolution modèle EDP du second ordre avec ma méthode des

Caractéristiques

9-1-Point de vue de J.P.Nougier-R.Wait-M.Bavadpoor

J.P.Nougier (voir bibliographie) propose cet exemple de EDP du second degré, sans perdre de vue que la doctrine du soir de la gloire de l'avic-toire est bel bien le 5 septembre, quand on a crié à gauche et à droite que ça y est il réussit à le stabiliser. Soit donc ce fameux exemple,

$$a \cdot \delta^2 f / \delta x^2 + b \cdot \delta^2 f / \delta y \delta x + c \delta^2 f / \delta y^2 = e \quad (85)$$

a, b, et c peuvent dépendre de x, y, f, fx, et fy. On forme ces transformations.

$$P = \delta f / \delta x \quad (86) \quad q = \delta f / \delta y \quad (87) \quad r = \delta^2 f / \delta x^2 \quad (88) \quad s = \delta^2 f / \delta y^2 \quad (89)$$

La méthode des caractéristiques de Clairaut et Charpit ont une importance dans l'évolution de l'histoire des équations EDP. On remplace.

$$e = a \cdot r + b \cdot s + c \cdot t \quad (90)$$

On introduit ces relations.

$$df = p \, dx + q \, dy \quad (91)$$

$$dp = r \, dx + s \, dy \quad (92)$$

$$dq = s \, dx + c \, dy \quad (93)$$

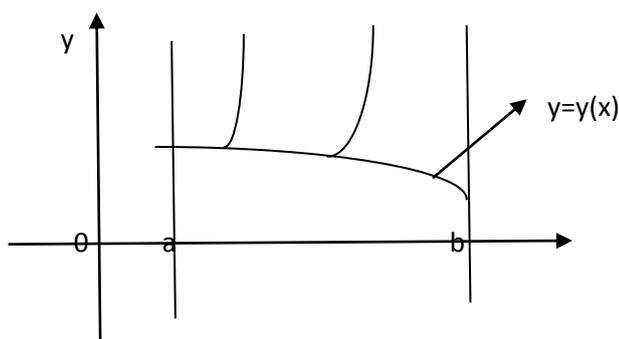
Il existe des solutions si ce déterminant est nul.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} \quad (94)$$

Finallement on tombe sur cette èquation de lignes caractèristiques,
 Vue comme les courbes ou on sait calculer la solution des EDP par
 dèveloppement limitè avec les conditions de Cauchy,des conditions
 initiales (Dirichlet) et condition limites (Neumann).

$$f(x,t=0)= f_0(x) \quad (95) \quad f_t(x,0)= f_1(x) \quad (96)$$

Figure : lignes caratèristiques



On trouve cette èquation des lignes caractèristiques.

$$a (dy/dx)^2 - b (dy/dx) + c = 0 \quad (97)$$

On a ces classes de EDP:

----si $b^2-4ac < 0$ (98) on a la classe elliptique.

-----si $b^2-4ac = 0$ (99) on a la classe parabolique

-----si $b^2-4ac > 0$ (100) on a la classe hyperbolique.

Ces auteurs reunissent les analyses de lignes caractèristiques,de base
 molèculaire,de lignes de champ èlectrique en rayonnement èlectro-
 magnetique.

Dans beaucoup de modèles EDP on confond la variable y à t le temps.

$$a \delta^2 f / \delta x^2 + b \delta^2 f / \delta x \delta t + c \delta^2 f / \delta t^2 = e \quad (101)$$

a, b, c, e peuvent être constants ou non.

-----si $a(x), b(x), c(x)$ et $e(x)$, on a cas linéaire du second ordre.

----- si $a(x), b(x), c(x)$ et $e(x, f)$ on la classe semi linéaire

-----si $a(x, f), b(x, f), c(x, f), e(x, f)$ on a la classe quasi linéaire.

On doit avoir un déterminant mineur égal aussi à 0.

$$\begin{vmatrix} a & e & c \\ dx & dp & 0 \\ 0 & dq & dy \end{vmatrix} = 0 \quad (102)$$

On trouve la 2^{ème} équation des caractéristiques, équations de Charpitt et Clairaut.

$$a dy dp + c dx dq - e dx dy = 0 \quad (103)$$

Les solutions caractéristiques sont,

----2 solutions réelles différentes.

$$dy/dx = [b^2 - \Delta]^{1/2} / 2a \quad (104) \text{ courbes } C1$$

$$dy/dx = [b^2 + \Delta]^{1/2} / 2a \quad (105) \text{ courbes } C2$$

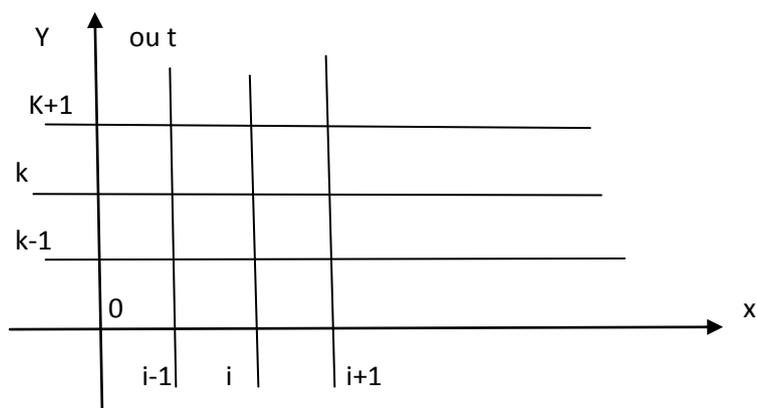
Dans ce cas pour $a < x < b$ (106) on intègre en fonction de x les intégraux.

On va voir des cas simples avec les coefficients non constants et constants,

On adopte la courbe $y=y(x)$ de la condition aux limites par exemple sur l'axe,

$Y=0$ (106) ou $t=0$ (107)

Figure 9



On prend $f(x,t=0) = f_0(x)$ (108) et $f(x=0,t) =$

CHAPITRE 10

Modèle EDP VI1-3 cardiaque

10-1-Choix différentielle totale et EDP VI1-3

Je rappelle ces relations, dans les équations électriques.

$$I = C dV/dt \quad (108) \quad V = L di/dt \quad (109)$$

L'opérateur dérivée totale,

$$d/dt = \delta/\delta t + (\Delta x/\Delta t)\delta/\delta x + (\Delta x/\Delta t)^2 \delta^2/\delta x \delta t + (\Delta x)\delta^2/\delta x \delta t + (\Delta t)\delta^2/\delta t^2 \quad (110)$$

Finalement j'obtiens ce que j'appelle le modèle équation EDP VI1-3

$$\delta V/\delta t = (1/C)[L^2 CM/NT - (R_e + R_i)]\delta^2 V/\delta x^2 - (LM/NT)\delta V/\delta x - (1/N)\delta^2 V/\delta x \delta t - (1/C)I_1 + (1/C)F(V) + (1/C)I_0 \quad (111)$$

$$\delta I_1/\delta t = -(L^2 M/NT)\delta^2 I_1/\delta x^2 - (LM/NT)\delta I_1/\delta x - (1/N)\delta^2 I_1/\delta x \delta t + (1/L)V - (R/L)I_1 + E/L \quad (112)$$

Je pose ces définitions.

$$A = (1/C)[L^2 CM/NT - (R_e + R_i)] \quad (113) \quad B = -(LM/NT) \quad (114)$$

Les solutions sont les fonctions si elles existent $V(x,t)$ et $I_1(x,t)$, avec le.

Choix A1, A2 et A3 différent en anisotropie.

CHAPITRE 11

Généralisation du modèle EDP VI1-3 sur l'espace (x,y,t)

11-1-Généralisation

La généralisation consiste à dire que la propagation sur le réseau VI1 est isotrope sur les 3 dimensions x,y,et z.

$$\delta V/\delta t = A[\delta^2 V/\delta x^2 + \delta^2 V/\delta y^2] + B[\delta V/\delta x + \delta V/\delta y] + D[\delta^2 V/\delta x \delta t + \delta^2 V/\delta y \delta t] - (1/C)I1 + (1/C)F(V) + (1/C)I0 \quad (115)$$

$$\delta I1/\delta t = G[\delta^2 I1/\delta x^2 + \delta^2 I1/\delta y^2] - (LM/NT)[\delta I1/\delta x + \delta I1/\delta y] - (1/N)[\delta^2 I1/\delta x \delta t + \delta^2 I1/\delta y \delta t] + (1/L)V - (R/L)I1 + E/L \quad (115)$$

Les solutions sont $V(x,y,t)$ et $I1(x,y,t)$. avec les choix A1,A2 et A3 en anisotropie.

CHAPITRE 12

Généralisation du modèle EDP VI1-3 sur (x,y,z,t)

12-Introduction

On sait traduire le laplacien et le gradient en dimension 3 comme dans les chapitres précédents. Le lecteur pourra retrouver facilement cette équation, avec les choix A_1, A_2 et A_3 , les coefficients de diffusion. sur les 3 axes.

CHAPITRE 13

Le modèle EDP VI1-4 cardiaque

13-1-Introduction du terme $\delta^2V/\delta t^2$ et $\delta^2V/\delta x\delta t$ developpement limité

$$\delta V/\delta t = A\delta^2V/\delta x^2 + B\delta V/\delta x + D\delta^2V/\delta x\delta t - (1/C)I_1 + (1/C)F(V)$$

$$E\delta^2V/\delta t^2 \quad (115)$$

$$\delta I_1/\delta t = K\delta^2I_1/\delta x^2 + Q\delta I_1/\delta x + P\delta^2I_1/\delta x\delta t + G\delta I_1/\delta t^2 + (1/L)V -$$

$$(R/L)I_1 + E/L \quad (116)$$

Avec les choix A_1, A_2, A_3 et anisotropie.

CHAPITRE 14

EDP VI1 cardiaque et modèle de résolution des variables séparées

Et problème de Cauchy

14-1-Analyse propagation cardiaque et possibilité réentrance et

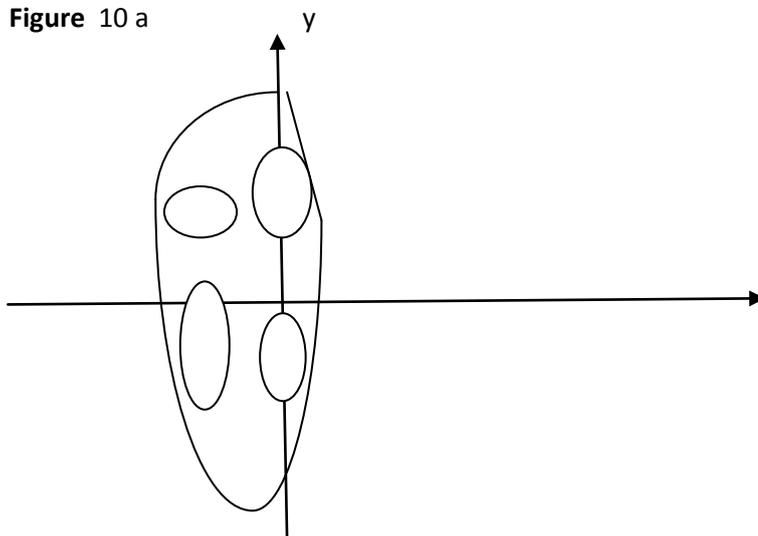
lien équation onde et équation chaleur

On prend exemple espace cardiaque définie par une courbe limite

En forme de 2 ellipses collées, le Sinus S qui est la source d'excitation

de coordonnées $x=x_1$ et $y=y_1$ sur la figure en bas,

Figure 10 a

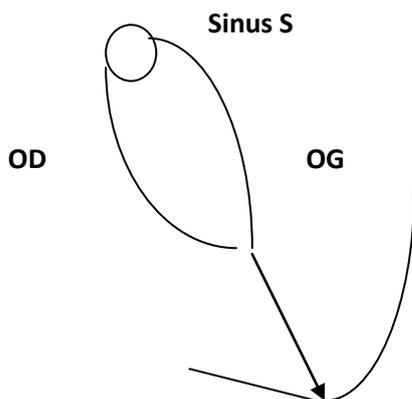


Une équation ellipse comme bord du cœur et intérieur ellipse avec les 2

Oreillettes, le Sinus S qui donne le rythme, et le canal AV, Ashoff Tawara,

Et les 2 ventricules. $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 0$ (161)

Figure 11



VD AV VG

14-2-Intégration et illustration modèle EDP 1 et variables séparées

Soit une seule équation EDP de cette forme sans les autres termes

$$\delta V / \delta t = A \delta^2 V / \delta x^2 + B \delta V / \delta x + DV + G(x, V) \quad (162)$$

Elle semble être du genre semi linéaire. On choisit G comme suit,

$$G(x, V) = aV^3 + bV^2 \quad (163) \text{ avec la fonction } V(x, t)$$

On pose la solution sous la forme séparée.

$$V(x, t) = V_n(x) * G_n(t) \quad (164)$$

Je substitue dans l'équation. ' Signifie dérivée.

$$V_n * G_n(t)' = A * V_n'' * G_n + B * V_n' * G_n + D * V_n * G_n + [aV_n^3 G_n^3 + bV_n^2 G_n^2] \quad (165)$$

Je rassemble les termes ,

$$dG_n(t)/dt = (AV_n''(x) + BV_n'(x) + DV_n(x)G_n(t))/V_n * G_n + [aV_n^3 G_n^3 + bV_n^2 G_n^2]/V_n \quad (166)$$

Je découple avec cette condition,

$$(AV_n'' + BV_n' + DV_n)/V_n = -n \quad (167) \text{ n des entiers.}$$

Je trouve cette équation EDO,

$$AV_n(x)'' + BV_n(x)' + (D + n)V_n(x) = 0 \quad (168)$$

L'équation caractéristique devient,

$$Ap^2 + Bp + (D+n) = 0 \quad (169)$$

Je forme le déterminant. avec n entiers.

$$\Delta_n = B^2 - 4A(D+n) \quad (170)$$

On a ces cas de nouvelles situation,

---Si $\Delta_n < 0$ (171) on a une équation **hyperbolique** avec solutions

Complexes,

14-3-Cas elliptique solution complexe

Dans ce cas on a,

$$V_n(x) = A_n \exp(\alpha x) * \exp(j\beta n x) + B_n \exp(\alpha x) * \exp(-j\beta n x) \quad (172)$$

On trouve,

$$V_n(x) = A_n \exp(\alpha_n x) \cos(\beta_n x) \quad (73)$$

$$\alpha_n =$$

$$p_{1n} = \alpha_n(x) + j\beta_n(x) \quad (171) \quad p_{2n} = \alpha_n(x) - j\beta_n(x) \quad (172)$$

----Si $\Delta_n = 0$ (173) on a le **cas parabolique**. solution double

-----Si $\Delta_n < 0$ (174) on a le **cas elliptique**, solutions réelles.

$$p_1 = [-B + j\sqrt{-\Delta_n}]/2A \quad (175) \quad \text{et} \quad p_2 = [-B - j\sqrt{-\Delta_n}]/2A \quad (176)$$

$$\alpha_n = -B/2A \quad (177) \quad \beta_n = \sqrt{-\Delta_n}/2A \quad (178)$$

$$V_n(x) = A_n \exp(\alpha_n x) \cos(\beta_n x) \quad (179)$$

La 2ème equation Ode donne,

$$dG_n(t)/dt = -n G_n(t) + H(V_n(x), x, G_n) \quad (180)$$

Avec le logiciel Matlab ou scilab on peut intégrer avec Runge Kutta en

se plaçant sur tous les points x , $0 < x < L$ (181)

La solution serie donne.

$$V(x, t) = \sum V_n(x) G_n(t) \quad (182)$$

On donne les conditions aux limites, du coeur

$$V(0, t) = V_0(t) = \exp(-t^2/2\delta) \quad (183)$$

On doit avoir ce serie vérifiè.

$$V(0, t) = \sum V_n(0) G_n(t) \quad (184)$$

L'autre condition aux limites,

$$V(L, 0) = 0 \quad (185)$$

Ceci donne la condition de mode de propagation.

$$B_n = n\pi/2L \quad (186)$$

CHAPITRE 15

Modèle anisotrope cardiaque EDP VI1

15-1-Introduction

On suppose avoir cette équation EDP VI1 complète et anisotrope.

$$\delta V / \delta t = A1 \delta^2 V / \delta x^2 + A2 \delta^2 V / \delta y^2 + B1 \delta V / \delta x + B2 \delta V / \delta y - D1 \delta^2 V / \delta x \delta t + D2 \delta^2 V / \delta t^2 \quad (186)$$

On choisit une solution à variable séparée.

$$V(x,y,t) = Vn(x,y) * gn(t) \quad (187)$$

Je substitue dans l'équation. Le lecteur intéressé pourra développer

Les calculs selon les principes du 1^{er} chapitre.

CHAPITRE 16

Introduction du système EDP VI1 couplé

16-1-Introduction équations EDP couplées

J'essaie à partir des classes d'équation EDP à une seule fonction, avec les

Opérateurs linéaires différentiels L, avec la fonction ϕ

$$L\phi = G(\phi) \quad (188)$$

On définit un système EDP couplé comme suit ,

$$L1\phi + L2\psi = G(\phi, \psi) \quad (189)$$

J'essaie de généraliser les résultats avec une seule équation en trouvant

Propriétés avec les systèmes à 2 variables couplées.

15-2-Le système EDVI1 couplé à 2 équations

Je choisis cet exemple cardiaque EDP VI1.

$$\delta V / \delta t = A\delta^2 V / \delta x^2 + B\delta V / \delta x + DV + G(x, V, I1) \quad (190)$$

$$\delta I1 / \delta t = A_0\delta^2 I1 / \delta x^2 + B_0\delta I1 / \delta x + DI1 + H(x, V, I1) \quad (191)$$

Je choisis ces modes nm de solutions couplées à variables séparées.

$$V_{nm}(x, t) = V_n(x)g_n(t) \quad (192)$$

$$I1_{mn}(x, t) = V_m(x)g_m(t) \quad (193)$$

Je substitue dans les équations.

$$V_n g_n' = AV_n'' g_n + BV_n' g_n + DV_n g_n + G(x, V, I1) \quad (192)$$

$$V_m g_m' = A_0 V_m'' g_m + B_0 V_m' g_m + D_0 V_m g_m + H(x, V, I1) \quad (193)$$

16-3-Découplage des modes de propagation

Je réarrange.

$$g_n' = ((AV_n'' + BV_n' + DV_n) / V_n) g_n + G(g_n, g_m, V, I1) \quad (194)$$

$$g_m' = ((A_0 V_m'' + B_0 V_m' + D_0) / V_m) g_m + H(g_n, g_m, V, I1) \quad (195)$$

Je fixe ces découplages n et m des entiers sous forme matricielle.

$$(AV_n'' + BV_n' + DV_n) / V_n = -n \quad (196)$$

$$(A_0 V_m'' + B_0 V_m' + D_0 V_m) / V_m = -m \quad (197)$$

Je trouve ces équations

$$AV_n'' + BV_n' + (D+n)V_n = 0 \quad (180)$$

$$A_0V_m'' + B_0V_m' + (D_0+m)V_m = 0 \quad (181)$$

On prends des solutions caractéristiques p_1 et p_2 .

$$Ap_1^2 + Bp_1 + D + n = 0 \quad (182)$$

$$A_0p^2 + B_0p + D_0 + m = 0 \quad (183)$$

On trouve les cas elliptique avec les solutions complexes et le cas parabolique et hyperbolique.

Je définis ces vecteurs $G_{nm} = (g_n, g_m)'$ (184)

J'obtiens ce système dynamique.

$$dG_{nm}/dt = A_{nm} * G_{nm} + F_{nm}(x, G_{nm}) \quad (185)$$

A chaque point x je peux intégrer ce système avec Runge kutta 4.

J'obtiens la solution serie.

$$V(x, t) = \sum_{nm} V_n(x) * G_{nm}(t) \quad (186)$$

$$I_1(x, t) = \sum_{nm} V_m(x) * G_{nm}(t) \quad (187)$$

On utilise les conditions aux limites et initiales.

$$V(x, 0) = V_0(x) \quad (188)$$

On doit pouvoir développer en serie $V_0(x)$

$$V_0(x) = \sum_{nm} V_n(x) G_{nm}(0) \quad (189)$$

Si on a le cas elliptique solution complexe,

$$V_n(x) = A_n * \sin(k_n x) \quad (190)$$

On a aussi une condition.

$$0 < x < l \text{ et } V_n(l) = 0 \quad (191) \quad k_n * l = n * \pi \quad (192)$$

Le vecteur d'onde est $k_n = n\pi/l$ (193)

On a $k_n = \omega_n/v$ (194) v vitesse de propagation. $k_n = 2\pi/\lambda_n$ (195) la longueur d'onde. On forme des solutions souvent sous cette forme.

$$V(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (196)$$

ω_n est la fréquence de l'onde f_n ,

$$\omega_n = 2\pi f_n \quad (197)$$

La transformée double de $V(x,t)$ a été introduite en système multi-mentionnel par R. Woham. $V(x,t)$ admet comme transformée de Fourier

$$V(x,t) \longleftrightarrow V(k,f) \quad (198)$$

en France le projet SOSSO de INRIA de modélisation du cœur a servi de référence. Les problèmes évoqués sont :

----- est-ce que le système admet une solution V , et à quelles conditions.

----- le système est-il périodique ou non périodique

----- en excitation forcée $A \sin \omega t$ comment se comportent les solutions.

----- quand le spectre des solutions est discret

----- quand les solutions sont **chaotiques**.

Les signaux cardiaques non périodiques sont pris gaussiens.

$$I_0(t-x/v) = I_0 \exp(-(t-x)^2/2\sigma^2) \quad (199)$$

CHAPITRE 17

La discrétisation des EDP VI1 cardiaques

17-1-Discretisation système EDP VI1 cardiaque

Soit cette équation cardiaque EDP VI1,

$$\delta V / \delta t = A \delta^2 V / \delta x^2 + B \delta V / \delta x + DV + G(x, V) \quad (200)$$

On adopte la discrétisation pas en avant ou arrière ou centrale, au

Point $V(i, j)$, x_j , et t_i , et soit les pas Δx et Δt .

$$(\delta V / \delta t)_{i,j} = (V(i, j) - V(i, j-1)) / \Delta t \quad (201)$$

$$(\delta V / \delta x)_{i,j} = (V(i, j) - V(i, j-1)) / \Delta x \quad (202)$$

$$(\delta^2 V / \delta x^2)_{i,j} = ((\delta V / \delta x)_{i,j} - (\delta V / \delta x)_{i-1,j}) / \Delta x \quad (203)$$

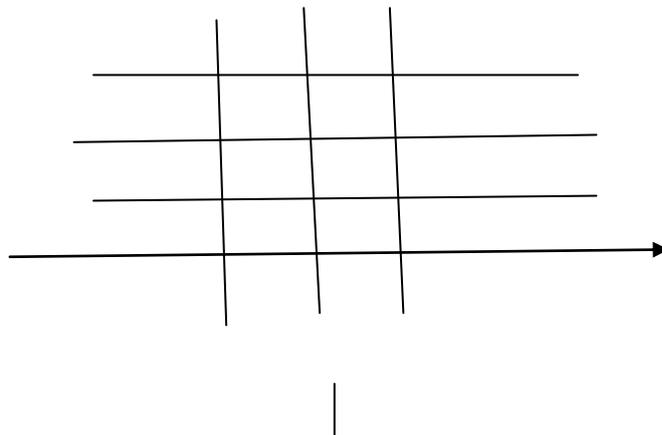
$$= (V(i, j) - 2V(i-1, j) + V(i-2, j)) / (\Delta x)^2 \quad (204)$$

On rejoint les théories moléculaires et les bases moléculaires, ou astrocytes.

Si on a 2 EDP couplées ceci correspond à un système à 2 atomes ou 2 corps.

Après avoir substitué dans les équations EDP on en déduit la base moléculaire.

Figure 13



CHAPITRE 18

Le modèle de Fitzhugh –Naguno propagation sur les nerfs .

18-1-Introduction

L'équation de Fitzhugh-Naguno de la propagation sur les nerfs est

Ce système EDP de 2 variables couplées V et W, diffusé en réseau.

$$\delta V / \delta t = V - V^3 / 3 - W + I_{\text{ext}} \quad (205)$$

$$\delta W / \delta t = V + W - bW \quad (205)$$

Le réseau network de propagation est,

Figure 15

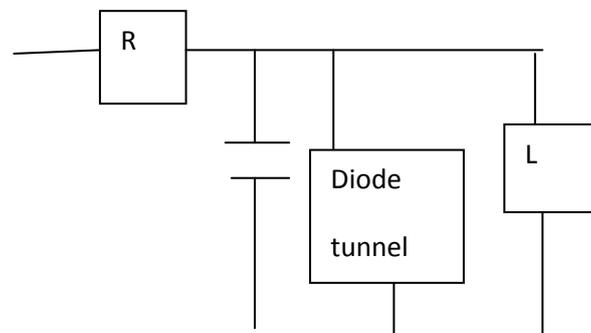


TABLE DES MATIERES

- 1-Chapitre 1-classification des équations EDP
 - 1-1-classification des EDP
 - 1-2-la classe des équations du 1^{er} ordre
- 2-Chapitre 2-la théorie hamiltonienne et les systèmes EDP couplés
 - 2-1-introduction
- 3-Chapitre 3-exemple d'équation EDP 1^{er} ordre et lignes caractéristiques
 - 3-1-exemple EDP 1^{er} ordre
- 4-Chapitre 4- propagation sur lignes électriques
- 5-Chapitre 5-propagation excitation et réseau VI1
 - 5-1-phénomène cardiaque
 - 5-2-propagation sur fibre cardiaque et réseau VI1
- 6-Chapitre 6-le modèle EDP VI1 un processus réaction-diffusion
 - 6-1-introduction modèle
- 7-Chapitre 7 modèle le système EDP couplé cardiaque EDP VI1-1
 - 7-2-proposition 1
 - 7-3-généralisation à l'espace x,y,t
 - 7-4-généralisation à l'espace x,y,z,t
- 8-Chapitre 8-le modèle EDP VI1-2
 - 8-1-introduction de la différentielle totale développement limité
 - 8-2-généralisation du modèle EDP VI1-2 x,y,z,t
- 9-Chapitre 9-résolution modèle EDP du second ordre avec méthode variable séparée
- 10-Chapitre 10- modèle EDP VI1-3 cardiaque
- 11-Chapitre 11- généralisation modèle EDP VI1-3 sur x,y,t
- 12-Chapitre 12-généralisation EDP VI1-3 sur x,y,z,t

13-Chapitre 13-le modèle EDP VI1-4 cardiaque

14-Chapitre 14-modèle EDP VI1 et modèle séparée et problème cauchy

14-1-analyse propagation cardiaque et possibilité onde et chaleur

15-Chapitre 15

16-Chapitre 16-introduction équations EDP couplées

17-Chapitre 17-discrétisation des équations EDP

18-Chapitre 18-le modèle de Fitzhugh et Naguno

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- 1-M.G.Smith-introduction to the theory of partial differential equation
- 2-V.Vlachimirov-V.Mikhailov-receuil de problems d'équations de physique mathématique-MIR
- 3-A.R.Mitchell-R.Wait-the finite element method in partial differential equation-wiley intersciences
- 4-Hamid Soleiman-Mohamed Bavandpoor-Arash Hamadi-Dareb Abbott-Digital implementation of a astrocyte modele-ieee trans neuro vol 26
Jan 2015
- 5-Thomas Auphan-equations aux derives cours François Hammel 2012
Master EDP 2
- 6-Marios Tsatsos-Dissertation theoretical and numerical study of the Van Der Pol equations-universite thessalonika
- 7-Bernard Picinbono-traitement du signal-EEA- Dunod
- 8-P.Debraine-Machnies traitement de l'information-tome 1 et 2-Masson
- 9-J.P.Nougier-méthode calcul numérique-edition Masson
- 10-Champ quantique à n corps-polytechnique romande

BIBLIOGRAPHIE

