

dont la formule d'état est : $\eta = (3pw + 3p'w')_t + (pw' + 4p'w)_{t'}$, soit $dt = |6t - 5t'| = 1$.

or nous savons que le résultat devrait être $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ avec une agrafe retournable dont nous

connaissons la valeur réelle $a_s^* = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et non $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
le **différentiel réel** est donc :

$$\sim \delta_a = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \text{ et non } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

ce qui génère un **déficit** de $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ inverse du précédent.

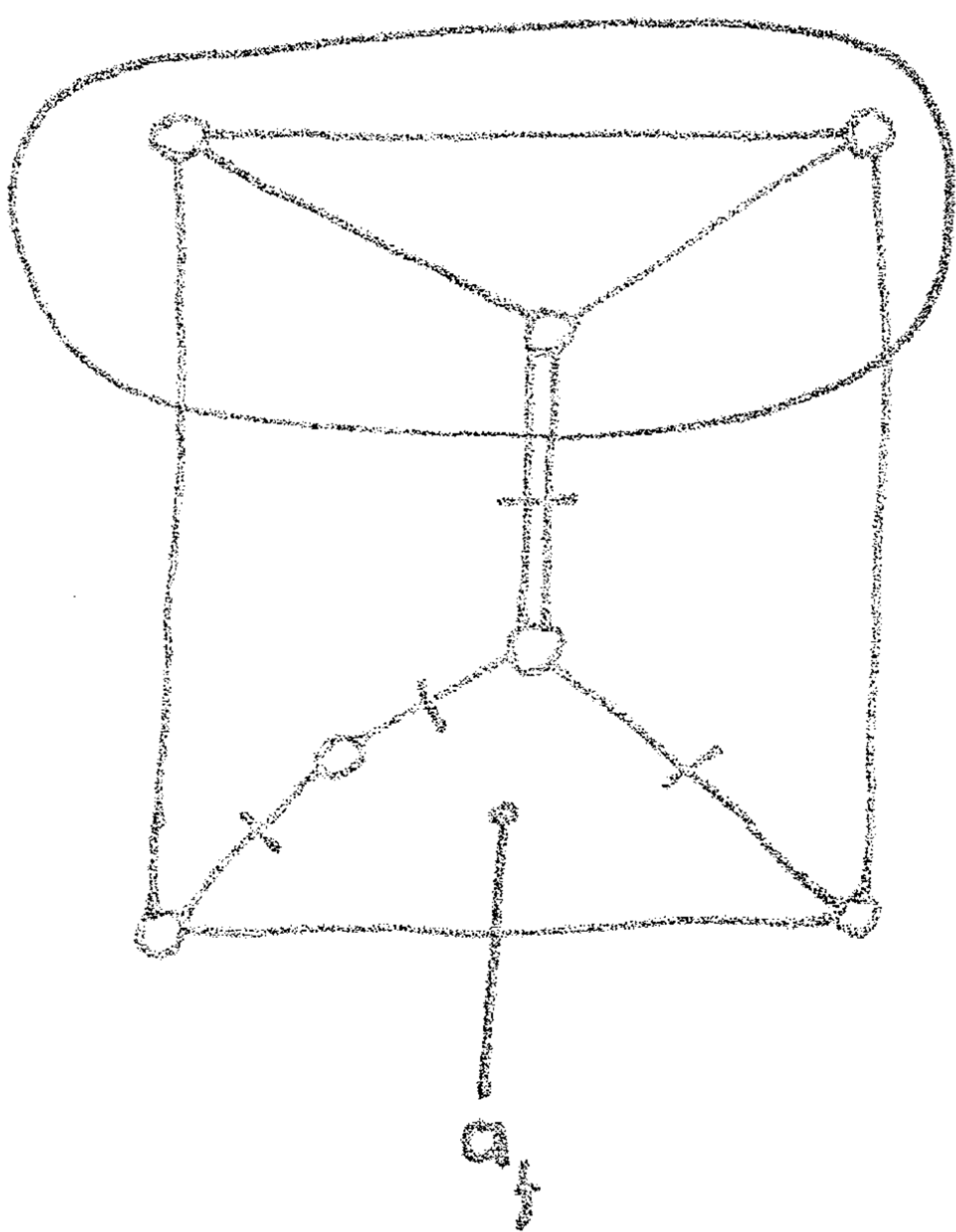
comme les **différentiels**, les **déficits** inverses sont tels que leur somme est toujours nulle.

II – transitions virtuelles nœudiennes

pour comprendre ce phénomène, nous pouvons l'envisager en tant que **transition virtuelle** – comme en physique quantique, lorsque, notamment, un électron change de bande d'énergie sans apport apparent d'énergie extérieure, soit par émission soit par absorption *vraie* d'un photon. dans ce cas les physiciens parlent d'un *nuage de photons virtuels* dans lequel baignerait l'électron et qu'il *utiliserait* pour effectuer ces transitions.⁶

les considérations qui permettent d'étayer cette conception proviennent des observations courantes sur le comportement de la parure ornée lors des métamorphoses d'états, en s'appuyant sur l'invariance de la tournure. rappelons brièvement les faits : la **tournure** est l'unité de la **parure** et de l'**ornure**. son invariance oblige, lors du retournement, la **parure** et l'**ornure** du motif retournable à changer simultanément. tous les autres croisements de l'état du nœud conservent leur parure ornée.

puisque nous avons constaté la **catastrophe différentielle** à partir du retournement d'une agrafe, nous allons étudier un autre cas où nous faisons agir une agrafe :



$$1) \eta_d = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

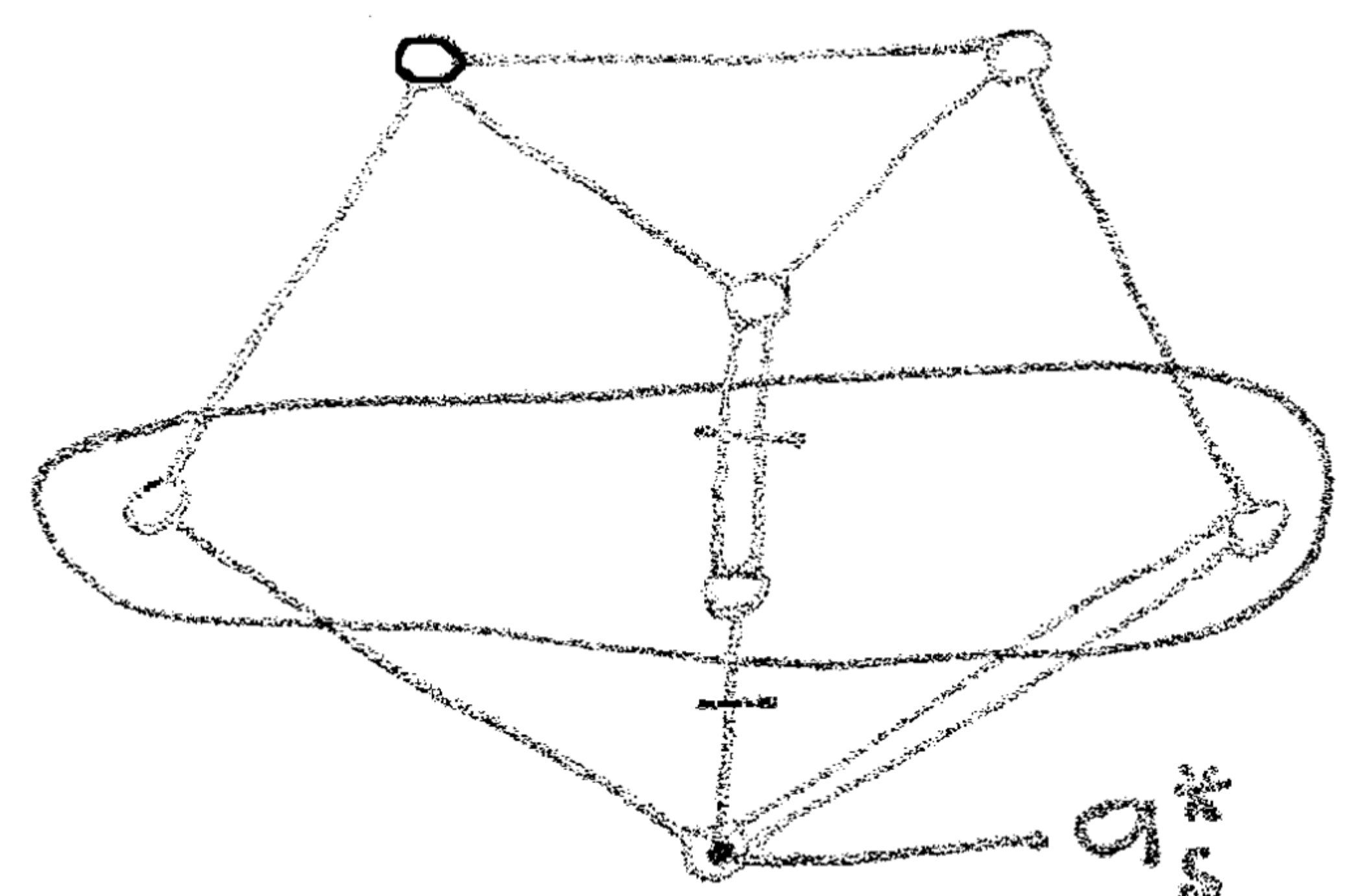
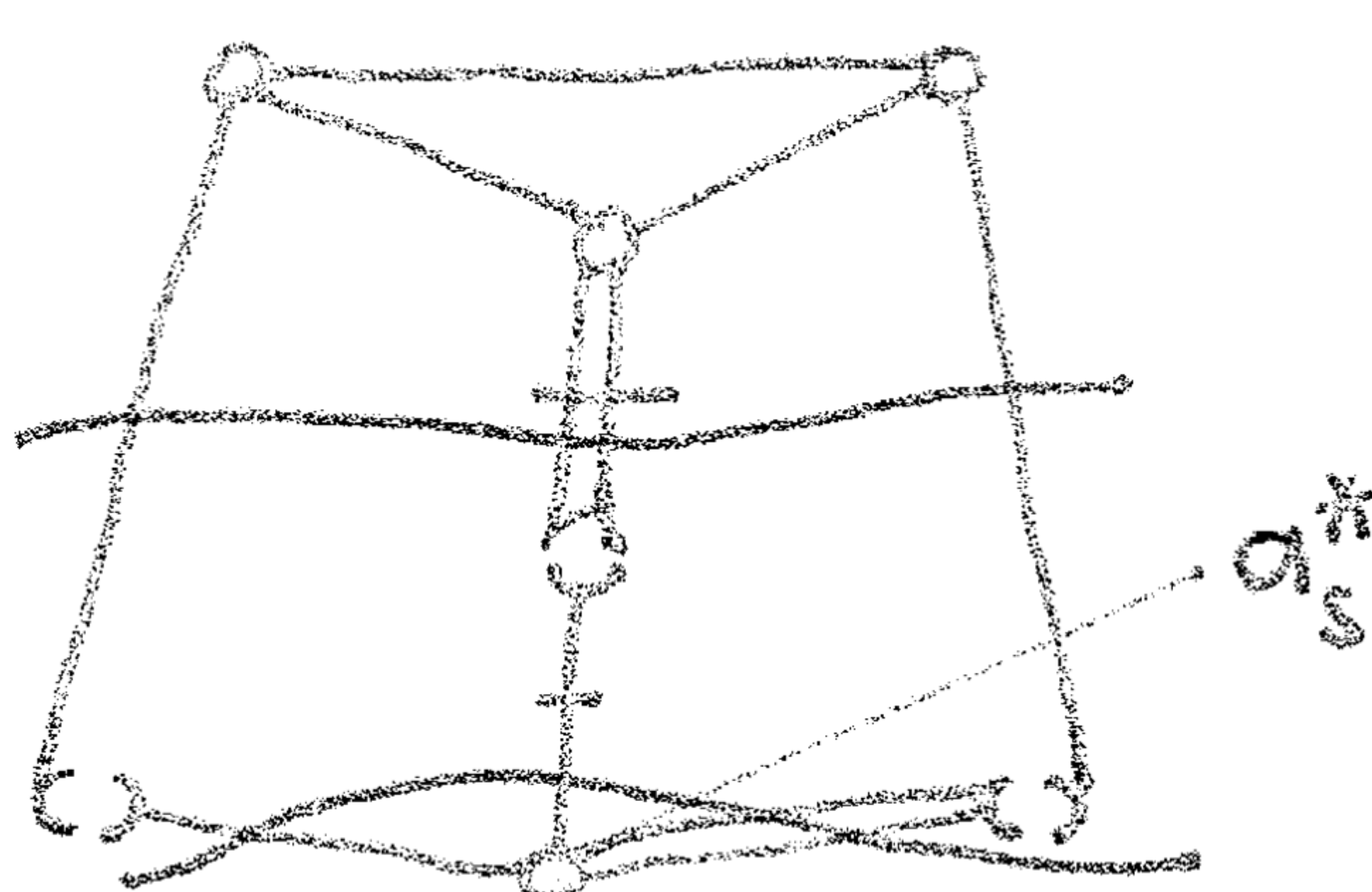
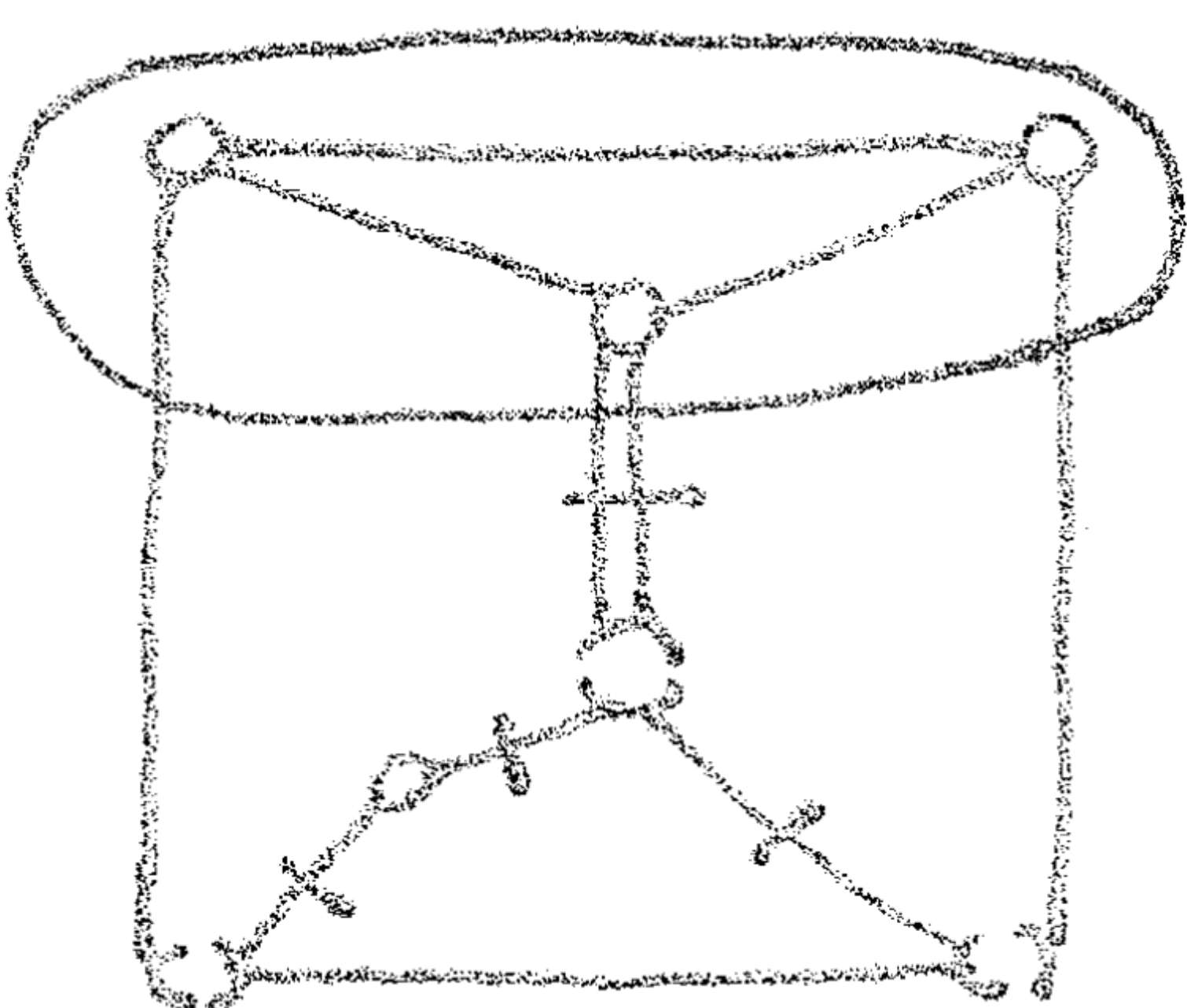
$$2) a_f = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3) a_s^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4) \delta_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

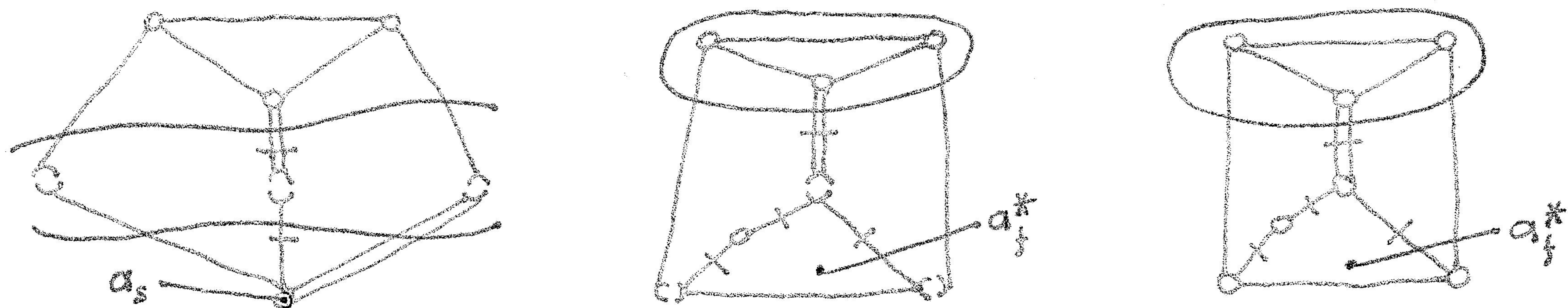
$$5) \eta_a = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

dont la formule d'état est : $\eta = (3pw + 3p'w')_t + 5p'wt'$, soit $dt = |6t - 5t'| = 1$. effectuons le retournement sur le graphe



⁶ la physique contemporaine offre de nombreux exemples où les choses se passent **comme si**. lire, par exemple, roger penrose : à la découverte des lois de l'univers, odile jacob 2007. la psychanalyse aussi. en mathématique, la méthode par l'absurde en est l'exemple le plus éclatant. il est possible aussi que les mythes qu'étudie l'anthropologie ressortissent de ce fait. entre symptôme inconscient et méthode consciente, infantile puis adulte, il existe certainement des passerelles qui font du **comme si** un universel. l'histoire trouverait ainsi, à travers toutes ces idées, le chemin du **comme si** au **c'est ainsi**.

nous obtenons bien l' η_a qui était *prévu*. effectuons la métamorphose en sens inverse :



nous obtenons l' η_a *prévu* et duquel nous étions partis. on ne peut donc pas attribuer à l'agrafe cette *catastrophe différentielle*.

a – motifs de métamorphose et bâti d'un état de nœud

lorsqu'on observe un état de nœud métamorphosable, il est loisible de le considérer comme formé de deux sous-structures, le **motif** de métamorphose et le **bâti** qui lui correspond. nous avons déjà rencontré cette formation lors des effectuations des retournements, quand nous avons séparé le motif retournable avec sa parure du reste de l'état qui semblait inchangé, immuable. et nous présentions la métamorphose comme un *décollage* topologique du motif retournable de son bâti, suivi du *recollage* du motif retourné avec ce même bâti.

nous pouvons présenter cette fiction sous la forme d'un tableau qui donne le bilan des opérations en distribuant les arêtes parées ornées les unes au motif de métamorphose, les autres au bâti correspondant de ce même motif, avant et après le retournement.

le tableau sépare ce qui est confondu dans la table d'état. écrivons la table d'un état quelconque :

$$\eta = \begin{array}{c|cc} & w & w' \\ \hline p & c_{11} & c_{12} \\ \hline p' & c_{21} & c_{22} \end{array}$$

dans laquelle les c_{pw} représentent les croisements de l'état du nœud concerné. les indices 'p' et

'w' donnent les valeurs suivant le tableau :

	1	2
p	p	p'
w	w	w'

nous faisons apparaître les croisements spécifiques au motif de retournement m et au bâti b correspondant en écrivant : $c_{pw} = m_{pw} + b_{pw}$. la formule d'état est $\eta = (c_{11} + c_{22})_t + (c_{12} + c_{21})_{t'}$, soit $d\eta = |(c_{11} + c_{22})_t - (c_{12} + c_{21})_{t'}|$. voici le tableau qui visualise ces informations :

	motif m	bâti b
parure p	$m_{11}w, m_{12}w'$	$b_{11}w, b_{12}w'$
parure p'	$m_{21}w, m_{22}w'$	$b_{21}w, b_{22}w'$

qu'on peut réécrire

	m		b	
	w	w'	w	w'
p	m_{11}	m_{12}	b_{11}	b_{12}
p'	m_{21}	m_{22}	b_{21}	b_{22}

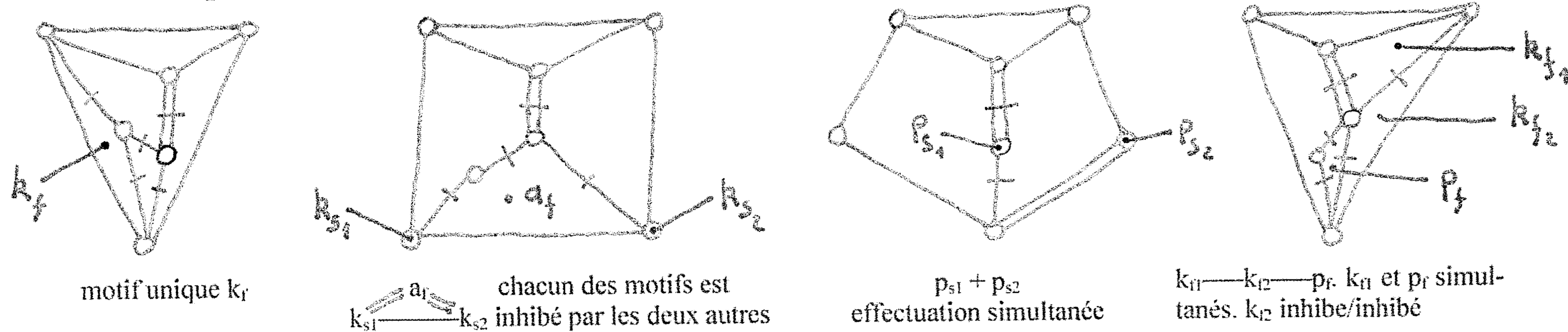
et la table d'état s'explicite ainsi :

$$\eta = \begin{array}{c|cc} & m_{11}+b_{11} & m_{12}+b_{12} \\ \hline & m_{21}+b_{21} & m_{22}+b_{22} \end{array}$$

le tableau ci-dessus donne la répartition des croisements avant retournement.

b – superposition des motifs de métamorphoses

dans un état de nœud, il se peut que plusieurs motifs de métamorphoses cohabitent. deux cas peuvent se constater : 1) les motifs n'ont aucune arête commune; ils sont *additionnables* c'est-à-dire qu'ils sont effectuable *simultanément*. 2) deux motifs possèdent au moins une arête commune; l'effectuation de l'un *inhibe* l'autre selon le principe du *ou exclusif*. à chaque état nous pouvons ainsi lui faire correspondre sa formule de superposition des motifs de métamorphose en écrivant les noms des motifs que l'on fait se rejoindre par autant d'arêtes qu'ils ont en commun. montrons cela sur une suite de métamorphoses régulières.



c – effets du retournement

le retournement a plusieurs effets :

- a) les parures ornées du bâti sont invariantes pour la métamorphose considérée;
- b) les parures et les ornures du motif retournable commutent *simultanément*. l'on a

$\eta_{initial} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$ avant métamorphose et $\eta_{final} = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{vmatrix}$ après.

le bilan peut donc s'énoncer ainsi : l'état initial η_i est égal à l'état initial du motif plus l'état du bâti; $\eta_i = m_{initial} + b$, et l'état final η_f est égal à l'état final du motif plus l'état du bâti resté invariant, $\eta_f = m_{final} + b$.

sur le tableau nous observons :

	$m_{initial}$		b			m_{final}		b	
	w	w'	w	w'		w	w'	w	w'
p	m_{11}	m_{12}	b_{11}	b_{12}	devient	m_{22}	m_{21}	b_{11}	b_{12}
p'	m_{21}	m_{22}	b_{21}	b_{22}		m_{12}	m_{11}	b_{21}	b_{22}

le retournement étant involutif, le mot *devient* peut se lire dans les deux sens, et les indices sont lus à partir de leur état lorsqu'on considère l'état final comme état initial, et réciproquement. par exemple m_{22} devient m_{11} .

nous avons donc, quel que soit l'état pris comme initial : $\eta_{initial} = \begin{vmatrix} m_{11}+b_{11} & m_{12}+b_{12} \\ m_{21}+b_{21} & m_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$

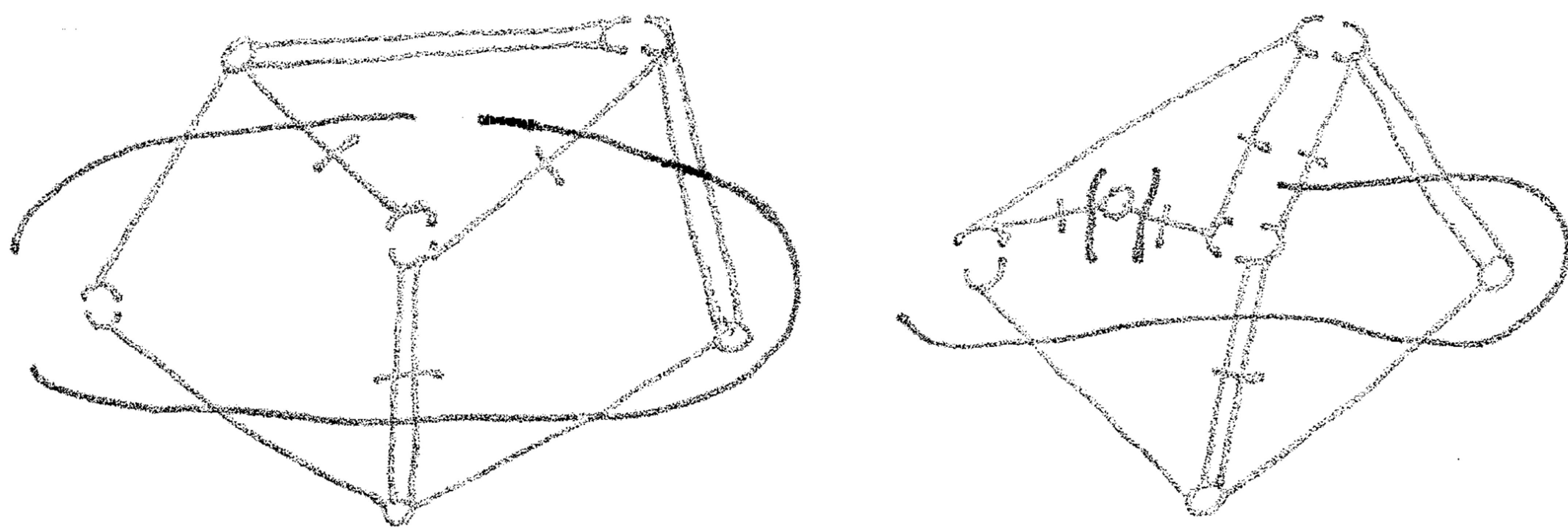
et $\eta_{final} = \begin{vmatrix} m_{22}+b_{11} & m_{21}+b_{12} \\ m_{12}+b_{21} & m_{11}+b_{22} \end{vmatrix}$ dont le *différentiel* est $\delta = m_{final} - m_{initial}$ c'est-à-dire :

$\delta_m = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Z & -Z' \\ Z' & Z \end{vmatrix}$

avec $Z = m_{11} - m_{22}$ et $Z' = m_{12} - m_{21}$, éventuellement nuls. le *différentiel* n'est donc fonction que du motif m . m_{final} et $m_{initial}$ étant mutuellement retournés l'un de l'autre.

ces considérations permettent de comprendre la notion de *transition virtuelle* pour répondre à la *catastrophe différentielle*.

revenons aux dessins des graphes qui présentent la dite *catastrophe*.



et analysons la métamorphose du premier état⁷. le bâti reste invariant; sa parure est aussi invariante. or on voit nettement que l'arête w' de l'épingle *retournante* va aller, après retournement, se joindre à une arête du bâti de même parure pour former une lunule parée p' ornée w' . ce fait impose à l'épingle *retournante* d'apparaître comme si elle provenait de la parure p afin de commuter en p' puisqu'elle demeure w' et que la tournure est invariante. donc, tout se passe comme si il existait un état transitoire *virtuel* dans lequel l'épingle *retournante* aurait eu le temps, l'opportunité, d'être dans la parure p avant de se changer régulièrement en parure p' . la transition virtuelle est donc $(p' \rightarrow [p] \rightarrow p')$.

pour cela il faut considérer que⁸ $a_s = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ est virtuellement $\sim a_s = a_s +$ le déficit⁹ correspondant à la *catastrophe différentielle*, soit

$$\sim a_s = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ dont le retourné est } (\sim a_f)^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

que l'on observe effectivement dans l'état retourné. inversement, sur l'état où^{9'} $a_f = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\text{le même raisonnement donne } \sim a_f = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{dont le retourné est } (\sim a_s)^* = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

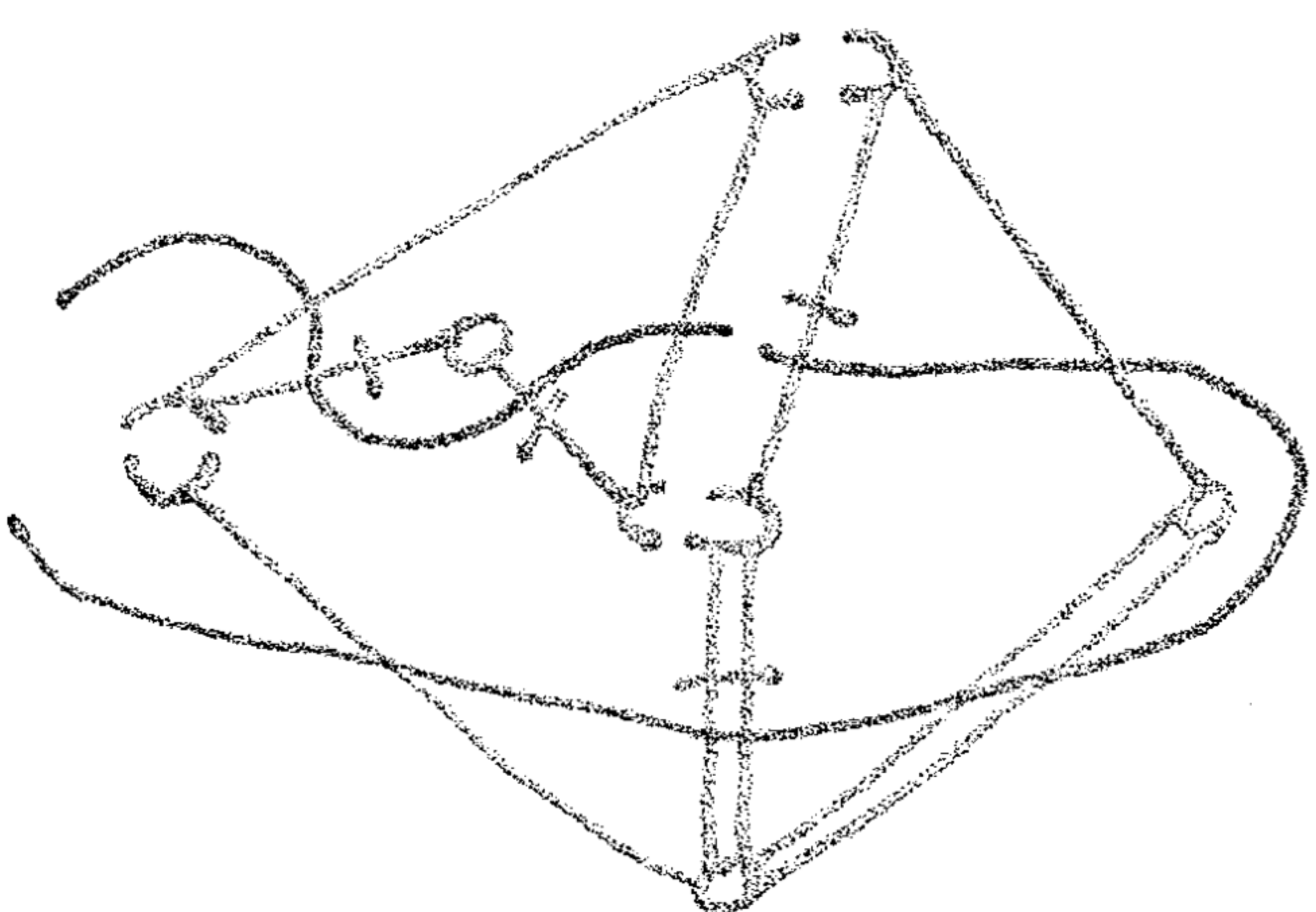
le protocole peut donc être *renormalisé* en fonction de ces *transitions virtuelles*. il y a deux écritures possibles :

- le *différentiel* est **mixte**, *virtuel* moins réel, puis **état final réel** somme de l'état initial **réel** et du *différentiel mixte*;
- le *différentiel* est *virtuel*, l'état initial **réel** devient initial *virtuel* et l'état final est somme de l'état initial et du *différentiel*, tous deux *virtuels*, l'**état final étant réel**.

appliquons ces considérations à notre exemple.

$$\text{a) } (\sim a_f)^* - a_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ le différentiel est mixte et l'état pré-}$$

$$\text{vu est } \eta_{\text{final}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$



les parures peuvent se joindre en un cycle

⁷ nous reprenons pour partie du commentaire, ce qui précède en *anomalies de parures*, page 4.

⁸ les valeurs sont données pages 4 et 5 *anomalies de parures*.

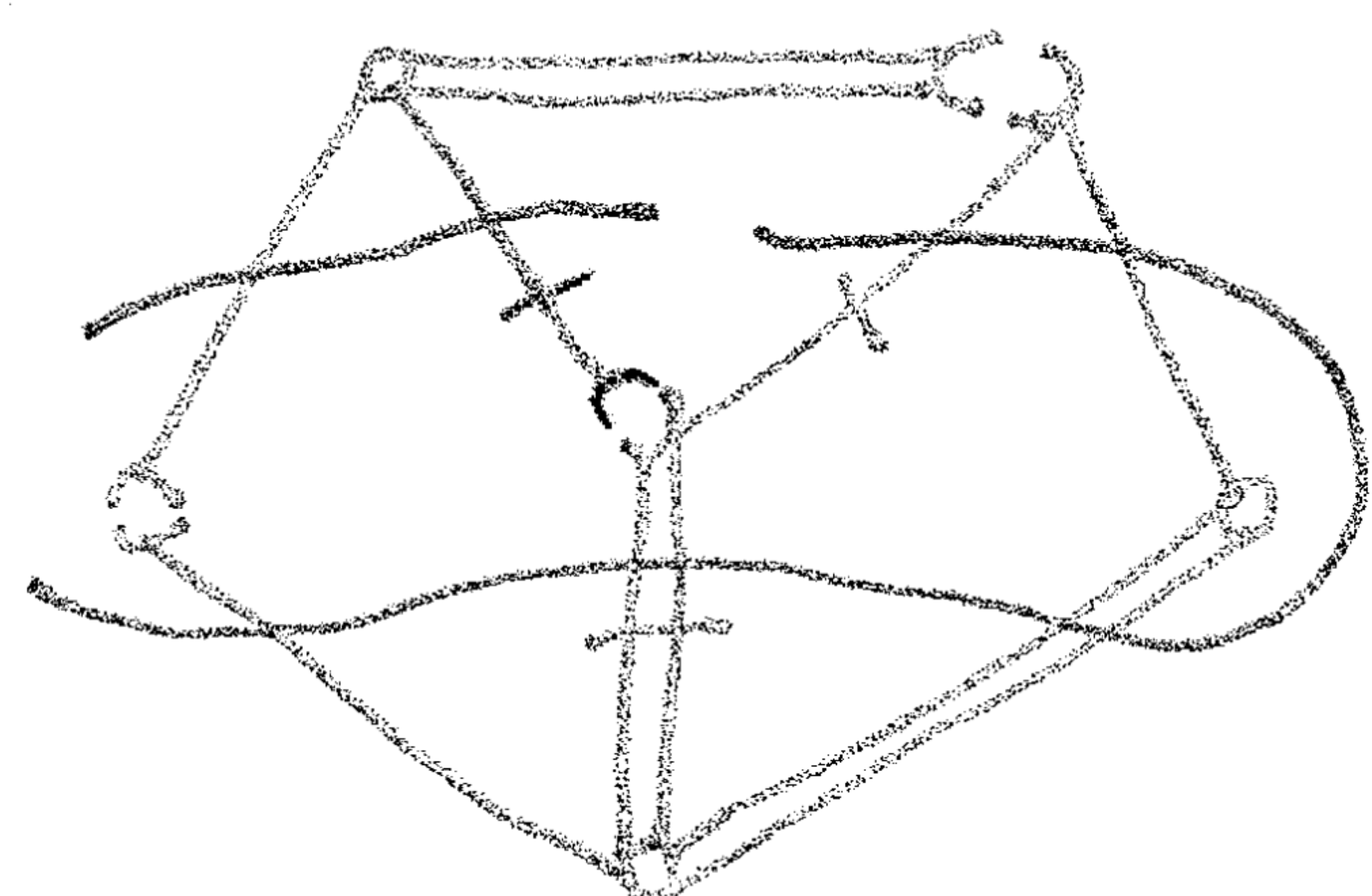
⁹ voir page 6.

^{9'} voir page 4.

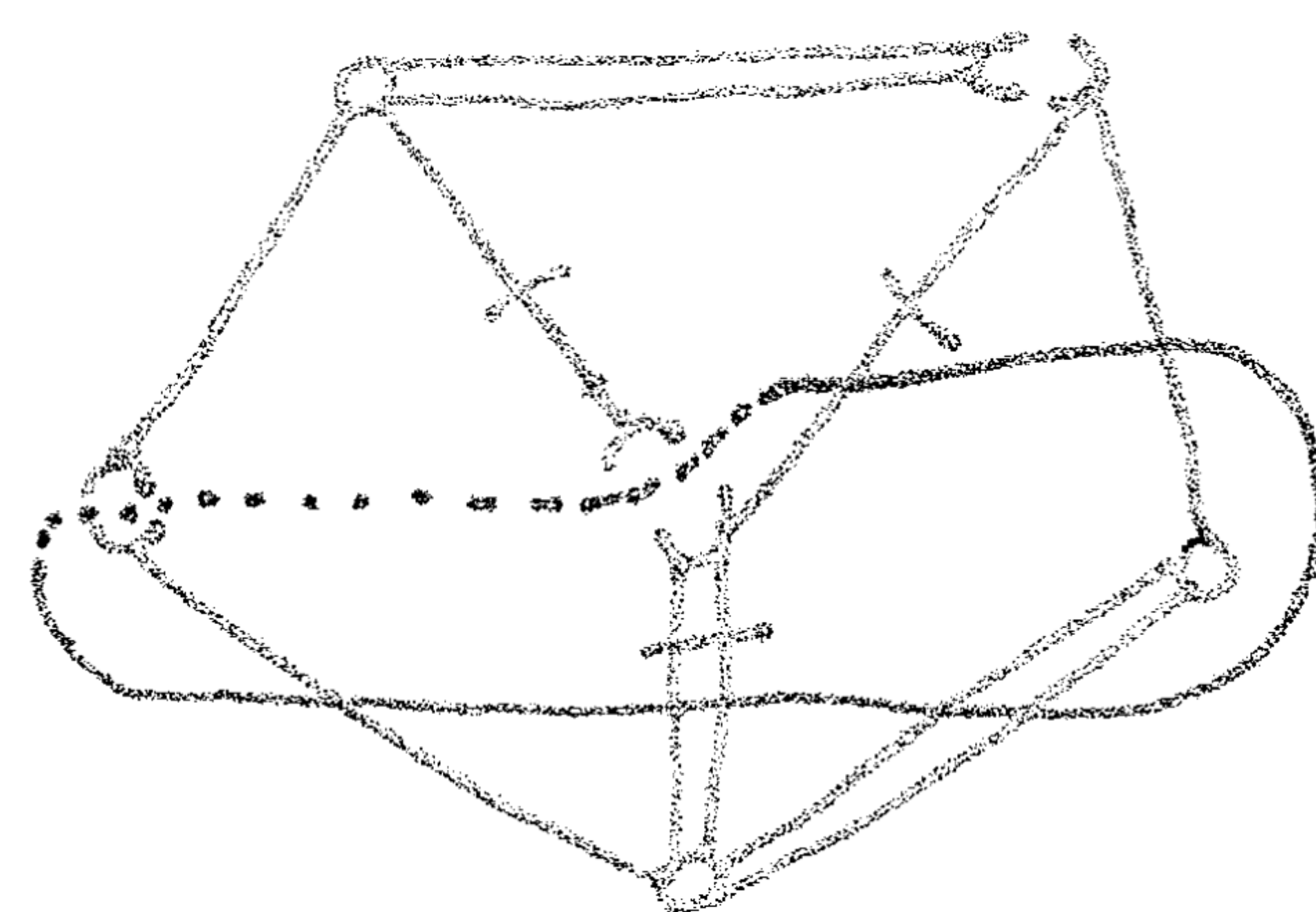
$$b) (\sim a_f)^* - \sim a_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

le *différentiel* est *virtuel*; l'état initial **réel** devient l'état initial *virtuel*¹⁰

$$\eta_{initial} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$



l'état
réel
devient
l'état
virtuel



$$\text{et l'état prévu est : } \eta_{final} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

e – *formule générale du déficit réel/virtuel*

un motif de retournement quelconque, coin ou agrafe, a pour table d'état : $\mathbf{m} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

son retourné est $\mathbf{m}^* = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{vmatrix}$

1) lorsque la transition est réelle, le *différentiel* est **réel** et a pour formule $\delta_m = \mathbf{m}^* - \mathbf{m}$. soit :

$$\delta_m = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{22}-m_{11} & m_{21}-m_{12} \\ m_{12}-m_{21} & m_{11}-m_{22} \end{vmatrix}$$

qu'on peut aussi écrire plus simplement $\delta_m = \begin{vmatrix} -Z & -Z' \\ Z' & Z \end{vmatrix}$ en faisant $Z = m_{11}-m_{22}$ et

$Z' = m_{12}-m_{21}$. le bâti de l'état, initial et final, étant toujours réel.

soit $\mathbf{A}$ l'état choisi comme initial et $\mathbf{E} = \mathbf{A}^*$ l'état final correspondant à l'état *prévu* par le calcul, la transition s'écrit : $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \delta_m$. effectuons la transition inverse : soit $\mathbf{E}$ l'état initial et $\mathbf{A}$ l'état final *prévu*. $\mathbf{E}$ est le retourné de $\mathbf{A}$ et l'écrivant comme tel nous pouvons écrire $\delta_{m^*} = -\delta_m$, il suffit en effet de permuter les tables d'états.

pour homogénéiser l'écriture avec celle des transitions *virtuelles*, nous pouvons calculer les *déficits* de ces transitions, dont nous nous attendons évidemment à ce qu'ils soient nuls.

puisque $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{A}$) est l'état *prévu* et obtenu dans la transition $\mathbf{AE}$ (resp. $\mathbf{EA}$), le *déficit* $\mathbf{d}_{AE}$ (resp. $\mathbf{d}_{EA}$) est égal à la différence des *différentiels*, soit $\mathbf{d}_{AE} = \delta_m - \delta_m = 0$ (resp. $\mathbf{d}_{EA} = -\delta_m - (-\delta_m) = 0$). chaque *déficit* est nul, et la somme des *déficits* du système transition/transition inverse est nulle, $\mathbf{d}_{AE} = \mathbf{d}_{EA} = 0$. ceci définit la transition réelle.

2) lorsque la transition est virtuelle, nous pouvons envisager quatre situations symétriques selon que l'on considère lequel des deux états mutuellement retournés servira d'état initial puisque leur *différentiel* n'est pas commutatif : $\{\mathbf{A}^*\mathbf{E}, \mathbf{EA}\}$, et $\{\mathbf{E}^*\mathbf{A}, \mathbf{AE}\}$. mais nous savons que ceci ne constitue pas une difficulté puisque le raisonnement est indifférent aux éléments ne considérant que leur position relative.

puisque le bâti des deux états, réels ou virtuels, participant à la métamorphose est invariant nous n'avons à considérer que les motifs de métamorphose. et c'est à partir de leur *réalité* ou *virtualité* que nous dirons que l'état dont ils procèdent est **réel** ou *virtuel*.

nous avons vu que les deux situations de retournement donnaient le *même déficit*. ceci va nous faciliter la tâche grâce aux jeux de permutations des éléments retournés les uns des autres.

a) *déficit* $d(\mathbf{A}, \sim \mathbf{E})$

$\mathbf{A}$ étant l'état initial sa table d'état s'écrit : $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

¹⁰ le *déficit* a été calculé en *déficit et défaut*, (b), page 6.